Semaine du 19/05

Chapitre 24 : Dimension des espaces vectoriels

Familles de vecteurs Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée. Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Si $(x_i)_{i\in I)}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors Im u =Vect $(u(x_i))_{i\in I}$. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts (voir méthode 16.4). Base, coordonnées. Bases canoniques de K^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $K_n[X]$, $K[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $K[X]$ et $K_n[X]$.
Existence de bases Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $[[1,n]]$, alors il existe une partie J de $[[1,n]]$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E. Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie. Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vec- teurs.
Dimension de $E\times F$, de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.
Rang d'une famille finie de vecteurs.
Sous-espaces et dimension Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.
Détermination d'une application linéaire Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i\in I$, $u(e_i) = f_i$. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u. Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, sur- jectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Application linéaire de rang fini. Notation rg(u). Le rang de $v\circ u$ est majoré par min(rg(u),rg(v)). Inva- riance du rang par composition par un isomorphisme.
Théorème du rang Forme géométrique du théorème du rang : si $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et si G est un supplémentaire de Ker u dans E , alors u induit un isomorphisme de G sur Im u. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $n =$ dim (Ker u)+rg(u).
Formes linéaires et hyperplans Forme linéaire. Formes coordonnées relativement à une base. Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H\oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan. En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous- espaces de dimension $n-1$. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Récipro- quement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans. Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de R^2 , des droites et plans vectoriels de R^3. L'étude de la dualité est hors programme

Démonstrations :

1. Le rang de $v\circ u$ est majoré par min(rg(u),rg(v)). Invariance du rang par composition par un isomorphisme (propr 23).
2. $\diamond$ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de E. H est un hyperplan de E si et seulement si H est de dimension $n-1$ (propr 26).
3. Etant données deux formes linéaires non nulles f et g telles que ker$f$ = ker$g$, il existe un scalaire $\lambda\neq 0$ tel que $f=\lambda g$ (propr 27).

Chapitre 25 : Séries

Vocabulaire propre aux séries : terme général, suite des sommes partielles, nature, somme lorsque la série converge, reste d'ordre n.
La somme de deux séries convergentes est convergente, le produit d'une série convergente par un scalaire est une série convergente, une combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente.
Situation de divergence grossière (si $\lim u \neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge).
Séries de référence : série harmonique, séries géométriques, séries télescopiques, séries de Riemann.
Séries à termes positifs : convergence ssi la suite des sommes partielles est majorée. Comparaison série-intégrale. Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Théorème d'équivalence. Comparaison série-série.

Démonstrations :
— $\diamond\diamond$ la série harmonique diverge et $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sim \ln(n)$ (P6)
— $\diamond\diamond$ Si $a > 1$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge (th1 cas $\alpha > 1$)
— règle de comparaison des séries à termes positifs (th2)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ et sur l'un des exercices suivants :
— Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-3)^n$ (haut page 2)
— Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ (haut page 2)
— Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n}$ diverge par comparaison avec la série harmonique (sous rq6 page 4)
— Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^2}$. En déduire la nature de la série $\sum e^{-n^2}$ (ex 1.1 page4)

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite
— déterminer rapidement le rang d'une famille de vecteurs (pas encore de formalisme matriciel)
— déterminer la nature de deux séries
  - l'une en étudiant la nature de la suite des sommes partielles associée,
  - l'autre en utilisant la règle de comparaison des séries à termes positifs (la technique du $n^\alpha u_n$ a été présentée avec trois exemples d'application où α était donné).
  Un soin particulier sera apporté sur le vocabulaire employé autour des séries.
— travailler un exercice concernant les hyperplans, les formes linéaires ou les formes coordonnées relativement à une base.

S'il reste du temps, les exercices pourront aussi être plus théoriques sur le rang d'une application linéaire.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj ⊕
Postel Esteban ⋄

G3 Boulard Louna (LV2) ⋄⋄
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo ⋄
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) ⊕

G8 Thiou Maxime ⋄
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla ⋄

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert ⋄⋄
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed ⋄
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys ⋄

G15 Canon Asybiade ⋄
Loudahi Abraham
Ramzi Sara ⊕

G16 : Moussaïd Soufiane ⊕
Watel Aurélien
Le Gociv Edenn