

Chapitre 24 : Dimension des espaces vectoriels

Introduction

Dans ce chapitre on va exploiter encore autrement la notion de combinaison linéaire avec la caractérisation des familles libres (toute combinaison linéaire à résultat nul des vecteurs de \mathcal{F} est triviale) et celle des familles génératrices \mathcal{F} de E (tout vecteur de E est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F}), ce qui nous amènera naturellement à la notion de base d'un espace vectoriel. Nous étudierons plus précisément le cas où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet au moins une base finie.

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne un corps commutatif. Dans la plupart des cas, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1 Familles de vecteurs

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1.1 Famille génératrice

Définition 1 (Combinaison linéaire).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E . w est combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} ssi $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid w = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de \mathcal{F} est le sous-espace engendré par les vecteurs de \mathcal{F} , $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Définition 2 (Famille génératrice).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E ; on dit que \mathcal{F} est une famille génératrice de E sur \mathbb{K} ssi $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$ ssi $\forall x \in E \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$.

► Exemples :

1. La famille $((1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots, (0, \dots, 1))$ est génératrice de \mathbb{K}^n
2. $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]^1$.

Propriété 1.

Toute sur-famille d'une famille génératrice finie est encore génératrice (une sur-famille de \mathcal{F} est obtenue en rajoutant à \mathcal{F} des vecteurs).

Propriété 2.

Soit F un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E alors $f(\mathcal{F}) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im} f$.

1. espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n

Remarque 1. Si E possède une famille génératrice finie, alors E est dit de dimension finie.

1. Si (x, y) est génératrice d'un sous-espace vectoriel F , alors $(x + y, x - y)$ est aussi génératrice de F
2. Il n'existe pas de famille génératrice **finie** dans $\mathbb{K}[X]^2$

1.2 Famille libre, famille liée

Définition 3 (Famille libre).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

\mathcal{F} est une famille libre de E sur \mathbb{K} ou linéairement indépendante sur \mathbb{K}

$$\text{ssi } \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0.$$

► Exemple : si $E = \mathbb{R}^2$, $e_1(1, 0)$ et $e_2(0, 1)$, (e_1) est une famille libre de \mathbb{R}^2 . (e_1, e_2) est une famille libre et génératrice de \mathbb{R}^2 (on dit alors que c'est une base). $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ est toujours génératrice mais n'est plus une famille libre.

Définition 4 (Famille liée).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E .

\mathcal{F} est une famille liée de E sur \mathbb{K} (on dit alors que les vecteurs (x_1, \dots, x_p) sont linéairement dépendants).

ssi \mathcal{F} n'est pas libre

$$\text{ssi } \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k = 0 \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0, 0, \dots, 0).$$

► Exemples :

1. Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires.
2. Si (u, v, w) est libre sur \mathbb{K} , alors $(u, u + v, u + v + w)$ aussi.
3. La famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ($x \mapsto xe^{\alpha x}, x \mapsto e^{\alpha x}$), où α est un réel, est libre sur \mathbb{R} .

Propriété 3.

Si une famille \mathcal{F} est libre alors tous les vecteurs de \mathcal{F} sont distincts et aucun n'est nul.

Propriété 4.

1. Toute sous-famille d'une famille libre est libre (une sous-famille de $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ s'obtient en supprimant à \mathcal{F} des vecteurs).
2. Toute sur-famille d'une famille liée est liée (une sur-famille de $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ s'obtient en ajoutant à \mathcal{F} des vecteurs).

Démonstration : les deux propositions sont équivalentes.

Propriété 5.

Soit $u \in E - \{0_E\}$, $\mathcal{F} = (u)$ est libre.

Propriété 6.

Si $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E , et si $\mathcal{F}' = (x_1, \dots, x_n, x)$ est liée alors x est une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{F} .

2. \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

Propriété 7.

$\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ est liée sur \mathbb{K} alors l'un au moins un des vecteurs de \mathcal{F} est combinaison linéaire des autres.

La réciproque est vraie.

Remarque 2. $(1, i)$ est une famille de \mathbb{C} libre sur \mathbb{R} mais liée sur \mathbb{C} .

Propriété 8 (La dépendance linéaire est conservée par une application linéaire).

Soit F un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
Si \mathcal{F} est liée alors $f(\mathcal{F}) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ est liée.
Si \mathcal{F} est libre et f injective alors $f(\mathcal{F})$ est libre.

1.3 Base**Définition 5 (Base).**

Une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est une base de E sur \mathbb{K} ssi elle est génératrice de E et libre dans E sur \mathbb{K} .

► Exemples :

- $(1, i)$ est une base de \mathbb{C} sur \mathbb{R} .
- (1) est une base de \mathbb{C} sur \mathbb{C} .
- $((1, 0, \dots), (0, 1, 0, \dots), \dots, (0, \dots, 1))$ est la base canonique de \mathbb{K}^n c'est-à-dire que c'est sa base la plus naturelle.
- $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée aussi base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$
- Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

$$M = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{ij} E_{ij} \text{ avec } E_{ij} = i \begin{matrix} & & j & & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

$(E_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ qui a $n \times p$ éléments. C'est donc une base de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Propriété 9 (Coordonnées).

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\forall x \in E \quad \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ (matrice colonne) représente les coordonnées (ou composantes) de x dans la base \mathcal{B} .

► Exemple : Soit $z \in \mathbb{C}$. Les coordonnées de z dans la base $(1, i)$ sont $(\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$.

Propriété 10.

- \mathcal{B} est une base de E ssi \mathcal{B} est une famille libre maximale de E (famille libre qui devient liée si on lui ajoute un vecteur).
- \mathcal{B} est une base de E ssi \mathcal{B} est une famille génératrice minimale de E (famille génératrice qui n'est plus génératrice si on lui enlève un vecteur).

Propriété 11.

Si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une famille libre d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

1.4 Bases et applications linéaires

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Propriété 12.

Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de vecteurs de E . Soit $u : \mathbb{K}^n \rightarrow E, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.

1. $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, E)$
2. u est injective si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est libre
3. u est surjective si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est génératrice de E
4. u est bijective si et seulement si (x_1, \dots, x_n) est une base de E

Soit F un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille quelconque de vecteurs de F .

Propriété 13.

1. $\exists! f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \forall i \in [1, n] \quad f(e_i) = f_i$.
2. f est injective ssi \mathcal{F} est une famille libre de F sur \mathbb{K} .
3. f est surjective ssi \mathcal{F} est une famille génératrice de F sur \mathbb{K} .
4. f est bijective ssi $\mathcal{F} = f(\mathcal{B})$ est une base de F sur \mathbb{K} .

Remarque 3. 1. Le premier point signifie qu'une application linéaire f de E dans F est entièrement connue lorsque sont données les images des éléments d'une base de E par f .
2. Pour montrer qu'une application linéaire f est un isomorphisme, on peut montrer que l'image d'une base de E par f est une base de F .

2 Dimension d'un espace vectoriel

2.1 Définition

Définition 6.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$. On dit que E est de dimension finie ssi il existe une famille finie $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ ($p \in \mathbb{N}$) génératrice de E sur \mathbb{K} .
Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

► Exemples :

1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ et plus généralement \mathbb{R}^n sont de dimension finie sur \mathbb{R} .
2. $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie sur \mathbb{R} , mais $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie sur \mathbb{R} .

2.2 Théorème d'échange

Théorème 1.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$. Soit $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille génératrice de E et $\mathcal{L} = (y_1, \dots, y_r) \in E^r$ une famille libre de E .
On peut échanger dans \mathcal{G} les vecteurs de \mathcal{L} avec r vecteurs de \mathcal{G} et obtenir une nouvelle famille \mathcal{F} qui sera toujours génératrice de E .
Par conséquent $r \leq p$, ce qui signifie que toute famille génératrice a un nombre de vecteurs supérieur ou égal au nombre de vecteurs de toute famille libre (et toute famille ayant un nombre de vecteurs strictement supérieur à celui d'une famille génératrice quelconque est liée).

Démonstration

Première étape : \mathcal{G} est génératrice de E et $y_1 \in E$ donc $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ $y_1 = \sum_{k=1}^p \alpha_k x_k$. Comme la famille \mathcal{L} est libre, $y_1 \neq 0$, donc l'un au moins des α_i est non nul. Quitte à changer l'ordre des x_i , on suppose que $\alpha_1 \neq 0$.

On a alors $x_1 = \frac{1}{\alpha_1}(y_1 - \sum_{k=2}^p \alpha_k x_k)$; donc x_1 est CL des vecteurs de la famille $\mathcal{G}_1 = (y_1, x_2, \dots, x_p)$. or $\forall x \in E, \exists (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p, x = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$.

$x = \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1 + (\beta_2 - \beta_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}) x_2 + \dots + (\beta_p - \beta_1 \frac{\alpha_p}{\alpha_1}) x_p$ donc $\mathcal{G}_1 = (y_1, x_2, \dots, x_p)$ est encore génératrice.

Deuxième étape : $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ $y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p$. Comme la famille \mathcal{L} est libre l'un au moins des α_i avec $i \neq 1$ est non nul. En effet, si $\alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ alors $\alpha_1 y_1 - y_2 = 0_E$ et (y_1, y_2) est liée. Or toute sous-famille d'une famille libre est libre, c'est impossible.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on suppose que $\alpha_2 \neq 0$.

On a alors $x_2 = \frac{1}{\alpha_2}(-\alpha_1 y_1 + y_2 - \sum_{k=3}^p \alpha_k x_k)$; donc x_2 est CL des vecteurs de la famille $\mathcal{G}_2 = (y_1, y_2, x_3, \dots, x_p)$ et

$\mathcal{G}_2 = (y_1, y_2, x_3, \dots, x_p)$ est encore génératrice.

$k + 1^{\text{ème}}$ étape : Supposons que (après renumérotation éventuelle) la famille $\mathcal{G}_k = (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_p)$ soit

génératrice de E , avec $k < \min(p, r)$, alors $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ $y_{k+1} = \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j + \sum_{j=k+1}^p \alpha_j x_j$. Comme la famille \mathcal{L} est libre l'un au moins des α_i avec $i \geq k + 1$ est non nul. En effet, si $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_p = 0$ alors $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k - y_{k+1} = 0_E$ et (y_1, y_2, \dots, y_k) est liée. Or toute sous-famille d'une famille libre est libre, c'est impossible.

Quitte à changer l'ordre de ces vecteurs, on suppose que $\alpha_{k+1} \neq 0$. Alors $x_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}(y_{k+1} - \sum_{j=1}^k \alpha_j y_j - \sum_{j=k+2}^p \alpha_j x_j)$,

et donc \mathcal{G}_{k+1} est encore génératrice de E .

Si $k = r$, $\mathcal{F}_r = (y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_p)$ est génératrice de E .

Remarque : x_{r+1}, \dots, x_p sont des vecteurs de \mathcal{G} éventuellement dans un ordre différent de l'ordre initial.

Si $r > p$, ce qui précède montre que (y_1, \dots, y_p) est génératrice, mais alors $y_{p+1} \in \text{Vect}(y_1, \dots, y_p)$, ce qui contredit la liberté de \mathcal{L} , donc nécessairement $r \leq p$

► Exemple : $(1, 1 + X, X + X^2, \dots, X^{n-1} + X^n, X^n + 1)$ est liée dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2.3 Existence d'une base

Théorème 2.

Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$, il existe au moins une base.

Démonstration

Comme E est de dimension finie, il existe une famille $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ génératrice de E ; si \mathcal{G} est libre dans E , alors elle forme une base de E et donc E admet \mathcal{G} comme base finie.

Comme E est non réduit à $\{0_E\}$, il existe un vecteur de \mathcal{G} qui est non nul. Quitte à changer l'ordre des x_i je suppose que $x_1 \neq 0_E$. $\mathcal{L}_1 = (x_1)$ est une famille libre de E . Soit \mathcal{L}_1 est génératrice de E et alors \mathcal{L}_1 est une base, soit \mathcal{L}_1 n'est pas génératrice de E auquel cas l'un des vecteurs x_2, \dots, x_p n'est pas CL de x_1 . Quitte à changer l'ordre de x_2, \dots, x_p , supposons que c'est x_2 . Alors $\mathcal{L}_2 = (x_1, x_2)$ est libre. Soit \mathcal{L}_2 est génératrice et c'est une base, soit \mathcal{L}_2 n'est pas génératrice et l'un des vecteurs x_3, \dots, x_p n'est pas CL de x_1 et de x_2 . Quitte à changer l'ordre de x_3, \dots, x_p , supposons que c'est x_3 . Alors $\mathcal{L}_3 = (x_1, x_2, x_3)$ est libre, etc... On construit ainsi une suite \mathcal{L}_k de familles libres de k vecteurs de \mathcal{G} . On s'arrête soit quand \mathcal{L}_k est génératrice et alors \mathcal{L}_k est une base de E , soit quand $k = p$ et alors $\mathcal{G} = \mathcal{L}_p$ est libre et génératrice de E .

Dans tous les cas on a une base constituée de n vecteurs de \mathcal{G} avec $1 \leq n \leq p$.

2.4 Dimension

Théorème 3 (Définition de la dimension d'un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$.
 Toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments et ce nombre s'appelle dimension de E et se note $\dim E$.
 Par convention si $E = \{0_E\}$, $\dim E = 0$.

Démonstration

Soit \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E . Soit n_1 est le nombre de vecteurs de \mathcal{B}_1 et soit n_2 est le nombre de vecteurs de \mathcal{B}_2 . \mathcal{B}_1 est libre et \mathcal{B}_2 est génératrice donc $n_1 \leq n_2$. \mathcal{B}_2 est libre et \mathcal{B}_1 est génératrice donc $n_2 \leq n_1$. Conclusion : $n_1 = n_2$.

Remarque 4. Lorsque $\dim F = 1$, on dit que F est une droite vectorielle et lorsque $\dim F = 2$, on dit que F est un plan vectoriel.

► Exemples :

1. \mathbb{K}^n est de dimension n .
2. \mathbb{C} est de dimension 1 comme \mathbb{C} -espace vectoriel et 2 comme \mathbb{R} -espace vectoriel.
3. $\mathbb{K}_n[X]$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n + 1$.
4. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
5. L'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est de dimension infinie.
6. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie np .

Propriété 14.

E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Toute famille libre a au plus n éléments.
Toute famille génératrice a au moins n éléments.
2. Réciproquement, toute famille libre de n vecteurs est une base.
Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

2.5 Théorème de la base incomplète**Théorème 4.**

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E . De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E .

Démonstration : soient $\mathcal{L} = (y_1, \dots, y_r)$ une famille libre dans E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

D'après le théorème d'échange, on peut échanger les vecteurs de \mathcal{L} avec r vecteurs de \mathcal{B} pour obtenir une famille génératrice de E . $\mathcal{B}' = (y_1, \dots, y_r, e'_{r+1}, \dots, e'_n)$, où e'_{r+1}, \dots, e'_n sont des vecteurs de \mathcal{B} . Or \mathcal{B}' a n vecteurs, c'est une base de E .

Deuxième point : Soit $\mathcal{G} = (x_1, \dots, x_m)$ une famille génératrice de E ($m \geq n$). On peut extraire de \mathcal{G} une base de E (théorème d'existence d'une base).

2.6 Espaces isomorphes**Propriété 15.**

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim E = \dim F$ si et seulement si E et F sont isomorphes.

Propriété 16.

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à \mathbb{K}^n

2.7 Espace vectoriel produit

Propriété 17.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.
 L'espace vectoriel produit $E \times F$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et de plus
 $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.
 En particulier, pour tout entier p , $\dim E^p = p \dim E$.

► Exemple : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

2.8 Espace $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété 18.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies.
 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et de plus
 $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F$.
 En particulier, $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \dim E$.

3 Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

3.1 Sous-espace vectoriel

Propriété 19.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E .

1. F est de dimension finie et $\dim F \leq n$
2. $\dim F = n$ si et seulement si $F = E$

★ Exercice : Trouver une base du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.

3.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels supplémentaires

Propriété 20.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
 $\dim E = \dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

Remarque 5.

1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , comme $F \times G$ et $F + G$ ont même dimension, $F \times G$ et $F + G$ sont isomorphes.
2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E , $\dim G = \dim E - \dim F$.
3. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E on obtient une base de E en réunissant (en concaténant) une base quelconque de F et une base quelconque de G .

Théorème 5 (Formule de Grassmann).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

Propriété 21.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :

1. F et G sont supplémentaires dans E .
2. $F + G = E$ et $\dim F + \dim G = \dim E$
3. $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$

Théorème 6.

Si F est un sous-espace vectoriel de E (\mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$), alors F admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire dans E .

Remarque 6. Si G et H sont deux supplémentaires de F dans E , alors ils ont même dimension, donc ils sont isomorphes.

★ Exercice : Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient les sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 engendrés respectivement par $\{(0, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ et par $\{(0, 1, 2), (2, 3, 4)\}$. Trouver une base et la dimension de F_1 , F_2 , $F_1 \cap F_2$ et $F_1 + F_2$.

3.3 Bases adaptées**Définition 7 (Base adaptée à un sous-espace vectoriel).**

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E . On note $p = \dim(F)$.

Une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est dite **adaptée** à F si et seulement si (e_1, \dots, e_p) est une base de F .

Définition 8 (Base adaptée à une somme directe).

Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On note $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$.

On suppose que la famille (e_1, \dots, e_p) est une base de F , que la famille $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_q)$ est une base de G et que F et G sont en **somme directe**.

Alors $(e_1, \dots, e_p, \epsilon_1, \dots, \epsilon_q)$ est une base de $F + G = F \oplus G$.

Pour déterminer une base de E adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$, il faut concaténer une base de F et une base de G .

4 Rang d'une application linéaire**4.1 Noyau et image d'une application linéaire****Théorème 7 (Théorème du rang).**

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un \mathbb{K} -espace vectoriel quelconque. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si G est un supplémentaire de $\text{Ker} f$ dans E alors G est isomorphe à $\text{Im} f$ (forme géométrique du théorème du rang)
2. $\text{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = \dim E$.

★ Exercice Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f((x, y, z)) = (x', y', z')$ tel que
$$\begin{cases} x' = -2x + y + z \\ y' = x - 2y + z \\ z' = x + y - 2z \end{cases}$$

Donner les images des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 et déterminer des bases de $\text{ker} f$ et $\text{Im} f$.

4.2 Rang d'une application linéaire

Définition 9.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Im}f$ est de dimension finie, alors on appelle rang de l'application linéaire f : $\text{rg}(f) = \dim \text{Im}f$.

On dit que l'application linéaire est de rang fini.

Remarque 7.

Si E est de dimension finie alors $\text{rg}f$ est fini et $\text{rg}f + \dim \text{Ker}f = \dim E$, donc $\text{rg}(f) \leq \dim E$.

Si F est de dimension finie alors $\text{Im}f$ est un sous-espace vectoriel de F et donc le rang de f est fini et $\text{rg}f = \dim \text{Im}f \leq \dim F$.

Propriété 22.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\text{rg}(f) \leq \inf(\dim E, \dim F)$.

► Exemple : Soit E de dimension finie et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Déterminer le rang de la projection p sur E_1 parallèlement à E_2 .

Propriété 23.

Si E et F sont deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles n et p et si f est une application linéaire de E sur F , alors

- $\text{rg}(f) = p$ si et seulement si f est surjective,
- $\text{rg}(f) = n$ si et seulement si f est injective,
- $\text{rg}(f) = p = n$ si et seulement si f est bijective,

4.3 Caractérisation des isomorphismes

Théorème 8.

Soient deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies telles que $\dim E = \dim F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes

1. f est bijective de E sur F ,
2. f est injective de E sur F ,
3. f est surjective de E sur F .

Remarque 8. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. f est bijective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est injective.

Pour montrer qu'une application linéaire f de E sur F (espaces vectoriels de **dimension finie**) est un isomorphisme, on peut par exemple montrer que $\dim E = \dim F$ et $\ker f = \{0\}$

Propriété 24.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $\exists g \in \mathcal{L}(E)$ $f \circ g = \text{Id}$, alors $f \in GL(E)$ et $g = f^{-1}$.
2. Si $\exists g \in \mathcal{L}(E)$ $g \circ f = \text{Id}$, alors $f \in GL(E)$ et $g = f^{-1}$.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie inversible à gauche ou à droite est donc inversible.

4.4 Invariance du rang par composition avec un isomorphisme

Propriété 25 (Rang d'une composée).

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$; $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg} f$ et $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg} g$, autrement dit $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg} f, \text{rg} g)$
2. Si f est bijective alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg} g$.
3. Si g est bijective alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg} f$.

Démonstration

1. $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im} g$ donc $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg} g$.
Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ est une base de $\text{Im} f$ alors $(g(\varepsilon_1), \dots, g(\varepsilon_k))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(g \circ f)$. Ainsi $\text{rg}(g \circ f) \leq \dim(\text{Im} f) = \text{rg} f$
2. f bijective $\Rightarrow g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = \text{Im} g$. Ainsi $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg} g$
3. Si g est bijective alors sa restriction $\bar{g} : \text{Im} f \rightarrow g(\text{Im} f)$ est bijective. Ainsi $\text{Im} f$ et $\text{Im}(g \circ f)$ sont isomorphes et $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg} f$.

4.5 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 10.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle rang de la famille \mathcal{F} la dimension de l'espace vectoriel engendré par \mathcal{F} :
 $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect} \mathcal{F})$.

Remarque 9. 1. $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$. De plus $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ ssi \mathcal{F} est une base de $\text{Vect} \mathcal{F}$ ssi \mathcal{F} est libre.

2. Rapport entre rang d'une famille de vecteurs et rang d'une application linéaire.

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels tels que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im} f$.
 $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = \dim(\text{Im} f) = \text{rg}(f)$.

► Exemple : Trouver le rang de la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, où $u_1 = (2, 3, -3, 4, 2)$, $u_2 = (3, 6, -2, 5, 9)$, $u_3 = (7, 18, -2, 7, 7)$ et $u_4 = (2, 4, -2, 3, 1)$.

Propriété 26 (Manipulations élémentaires).

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E .

1. On ne change pas le rang si on change l'ordre des vecteurs de \mathcal{F} .
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $(\alpha x_1, x_2, \dots, x_n)$ a le même rang que \mathcal{F} .
3. $\forall \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}^*$, $(x_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k x_k, x_2, \dots, x_n)$ a le même rang que \mathcal{F} .

Propriété 27.

$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0_E)$ a le même rang que (x_1, x_2, \dots, x_n) .

5 Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Rappel : une forme linéaire sur E est une application linéaire de E vers \mathbb{K} .

Définition 11.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle hyperplan vectoriel de E le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur E .

H est un hyperplan (vectoriel) de E , \mathbb{K} -espace vectoriel, ssi $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) - \{\tilde{0}\}$ telle que $H = \ker \varphi$.

Propriété 28 (Caractérisation d'un hyperplan).

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de E . H est un hyperplan de E si et seulement si H est de dimension $n - 1$.

Remarque 10. 1. En dimension 3 les hyperplans sont les plans vectoriels, d'où le nom en dimension quelconque. En dimension 2 les hyperplans sont les droites vectorielles.

2. Soit H un hyperplan de E , espace vectoriel de dimension finie n .
 $\dim H = n - 1$. H possède un sous-espace vectoriel supplémentaire et ce supplémentaire est de dimension 1.
 H possède donc pour supplémentaire une droite vectorielle et réciproquement.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$ de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} . Alors $x \in H$ si et seulement si $\varphi(x) = 0$, ssi $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, où $a_i = \varphi(e_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Définition 12 (Equations d'un hyperplan).

$\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, est une équation cartésienne de l'hyperplan H dans la base \mathcal{B} .

Réciproquement, dans une base \mathcal{B} , l'équation cartésienne $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ est celle de l'hyperplan H noyau de la forme linéaire non nulle définie sur \mathcal{B} par $\varphi(e_i) = a_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Propriété 29 (Formes linéaires de même noyau).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Etant données deux formes linéaires non nulles définies sur E : f et g , telles que $\ker f = \ker g$, il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $f = \lambda g$.

Par conséquent, deux hyperplans d'équations respectives : $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 0$ dans une base de E sont égaux si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $(b_1, \dots, b_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n)$, cad si leurs équations dans une même base sont proportionnelles.

Propriété 30 (Intersection d'hyperplans).

Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.

Remarque 11. Dans un système linéaire homogène à n équations et p inconnues, chaque équation peut être vue comme une équation d'un hyperplan de \mathbb{R}^p . L'ensemble des solutions est l'intersection de n hyperplans. C'est un sev de dimension au moins $p - n$.

Système d'équations d'un sous-espace vectoriel; cas des droites vectorielles de \mathbb{R}^2 , des droites et plans vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Définition 13 (Formes linéaires coordonnées dans une base).

On appelle formes linéaires coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ du \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n les applications e_i^* définies par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i^*(e_i) = 1 \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}, e_i^*(e_j) = 0$$

Propriété 31 (Base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ (base duale)).

*On garde les notations de la définition précédente.
La famille (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.*

Ainsi toute forme linéaire $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'écrit de manière unique $\phi = \sum_{k=1}^n a_k e_k^*$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Propriété 32 (Intersection d'hyperplans : réciproque).

Si E est un espace de dimension finie n , tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Cette propriété est la réciproque de la propriété de même titre.