TD23 exo 10

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\phi : \begin{array}{l} E \to ? \\ f \mapsto F \end{array}$ tq $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = xf(x)$

① Mq $\phi \in \mathcal{L}(E)$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in E^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$\phi(\alpha f+g)(x) = x(\alpha f+g)(x) = \alpha x f(x) + x g(x) = \alpha\phi(f)(x) + \phi(g)(x)$
$= (\alpha\phi(f)+\phi(g))(x)$

Donc $\phi(\alpha f+g) = \alpha\phi(f)+\phi(g)$

- Soit $f \in E$. Mq $\phi(f) \in E$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\phi(f)(x) = x \times f(x)$

$\phi(f)$ est le produit de $x \mapsto x$ et de $f$, toutes deux continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc $\phi(f)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\phi(f) \in E$.

② $\underline{\mathrm{Ker}\,\phi} = \{f \in E,\ \phi(f) = 0_E\} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}\ xf(x) = 0_E(x)\}$

$= \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ xf(x) = 0\} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 0\}$

D'une part, $0_E : x \mapsto 0 \in \mathrm{Ker}\,\phi$ car elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $0_E(x) = 0$

D'autre part, si $f \in \mathrm{Ker}\,\phi$ alors $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en $0$

donc $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ donc $f = 0_E$.

Conclusion: on a montré par double inclusion que $\boxed{\mathrm{Ker}\,\phi = \{0_E\}}$

(Donc $\phi$ est injective)

$\underline{\mathrm{Im}\,\phi} = \{F \in E,\ \exists f \in E,\ F = \phi(f)\} = \{F \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = xf(x)\}$

Soit $F \in \mathrm{Im}\,\phi$ alors $F$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et il existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = xf(x)$ donc $F(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{F(x)}{x}$.

$f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fcts cont sur $\mathbb{R}^*$ et pour que $f$ soit continue en $0$, il faut que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

càd $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$

il faut donc que $F$ soit dérivable en $0$ et que $F'(0) = f(0)$

Donc $\mathrm{Im}\,\phi \subset \{F \in E,\ F \text{ est der en } 0 \text{ et } F(0) = 0\}$

Réciproquement, soit $F \in E$ tq $F$ est der en $0$ et $F(0)=0$. On pose

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{F(x)}{x}$ et $f(0) = F'(0)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = xf(x)$ et $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et en $0$

Donc on a trouvé $f \in E$ tq $F = \phi(f)$ et $F = \mathrm{Im}\,\phi$.

Concl: $\boxed{\mathrm{Im}\,\phi = \{F \in E,\ F(0) = 0 \text{ et } F \text{ dérivable en } 0\}}$

Ex 15 TD 24

① La composée de 2 endomorphismes est un endomorphisme donc $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$ sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$.

$(\phi\circ\psi)\circ(\phi\circ\psi) = (\phi\circ\psi\circ\phi)\circ\psi = \phi\circ\psi$

$(\psi\circ\phi)\circ(\psi\circ\phi) = (\psi\circ\phi\circ\psi)\circ\phi = \psi\circ\phi$

donc $\phi\circ\psi$ et $\psi\circ\phi$ sont des projecteurs

② On sait déjà que $\mathrm{Im}(\phi\circ\psi) \subset \mathrm{Im}(\phi)$

Mq $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Im}(\phi\circ\psi)$

Soit $y \in \mathrm{Im}\,\phi$ alors $\exists x \in E$ tq $y = \phi(x)$

$y = \phi\circ\psi\circ\phi(x) = \phi\circ\psi(\underbrace{\phi(x)}_{\in E \text{ car } \phi\in\mathcal{L}(E)})$ donc $y \in \mathrm{Im}(\phi\circ\psi)$

Par symétrie, on peut affirmer que $\mathrm{Im}\,\psi = \mathrm{Im}(\psi\circ\phi)$ ($\psi$ et $\phi$ ont des rôles tout à fait symétriques).

③ On sait que $\mathrm{Ker}\,\phi \subset \mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)$

donc $\dim(\mathrm{Ker}\,\phi) \leq \underline{\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi))}$ $(\square)$

Appliquons le th du rang à $\phi$ puis à $\psi\circ\phi$ puisque $E$ est de dimension finie $n$ :

$\dim(\mathrm{Ker}\,\phi) + \dim(\mathrm{Im}\,\phi) = n$ $(*)$

$\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\psi\circ\phi)) = n$

or $\dim(\mathrm{Im}(\psi\circ\phi)) = \dim(\mathrm{Im}\,\psi)$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)) + \dim(\mathrm{Im}\,\psi) = n$ $(\Delta)$

on a donc par $(*)$ et $(\Delta)$, en identifiant $n$ dans les 2 expressions

$\dim \mathrm{Ker}\,\phi + \dim \mathrm{Im}\,\phi = \underline{\dim \mathrm{Ker}(\psi\circ\phi)} + \dim \mathrm{Im}(\psi)$

D'après $(\square)$ $\dim \mathrm{Ker}\,\phi + \dim \mathrm{Im}\,\phi \geq \dim(\mathrm{Ker}\,\phi) + \dim \mathrm{Im}\,\psi$

Donc $\mathrm{rg}\,\phi \geq \mathrm{rg}\,\psi$

Par symétrie on obtient également $\mathrm{rg}\,\psi \geq \mathrm{rg}\,\phi$

<u>Concl :</u> $\mathrm{rg}\,\phi = \mathrm{rg}\,\psi$.

Autre méthode : d'après le cours $\mathrm{rg}(\psi\circ\phi) \leq \mathrm{rg}(\phi)$

or $\mathrm{rg}(\psi\circ\phi) = \mathrm{rg}(\psi)$ d'après ②

De plus $\mathrm{rg}(\phi\circ\psi) \leq \mathrm{rg}(\psi)$

or $\mathrm{rg}(\phi\circ\psi) = \mathrm{rg}(\phi)$ d'après ②

Donc $\mathrm{rg}(\psi) = \mathrm{rg}(\psi\circ\phi) \leq \mathrm{rg}(\phi)$

et $\mathrm{rg}(\phi) = \mathrm{rg}(\phi\circ\psi) \leq \mathrm{rg}(\psi)$

Concl : $\mathrm{rg}(\psi) = \mathrm{rg}(\phi)$

TD 24

Ex 17 ① Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ Soit $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$f(\alpha(x,y,z)+(x',y',z')) = f((\alpha x+x', \alpha y+y', \alpha z+z'))$

$= (\alpha x+x'+\alpha z+z', \alpha y+y'-2(\alpha x+x'), \alpha x+x'+3(\alpha z+z'))$

$= (\alpha(x+z)+x'+z', \alpha(y-2x)+y'-2x', \alpha(x+3z)+x'+3z')$

$= \alpha(x+z, y-2x, x+3z) + (x'+z', y'-2x', x'+3z')$

$= \alpha f(x,y,z) + f(x',y',z')$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$. $f$ est un endomorphisme car si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par définition.

② • Déterminons Ker f

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in \text{Ker} f$ ssi $f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

ssi $(x+z, y-2x, x+3z) = (0,0,0)$

ssi $\begin{cases} x+z=0 \\ y-2x=0 \\ x+3z=0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

ssi $(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$

Donc $\text{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $f$ injective.

Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, $f$ injective ssi $f$ surjective ssi <u>$f$ bijective</u>

inutile

• Déterminons Im f.

D'après prop 2, comme $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille géné de $\mathbb{R}^3$ (base canonique de $\mathbb{R}^3$) alors $(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))$ est une famille géné de Im f

Donc $\text{Im} f = \text{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1))$

or $f(1,0,0) = (1+0, 0-2\times1, 1+3\times0) = (1,-2,1)$

$f(0,1,0) = (0+0, 1-2\times0, 0+3\times0) = (0,1,0)$

$f(0,0,1) = (0+1, 0-2\times0, 0+3\times1) = (1,0,3)$

Donc $\text{Im} f = \text{Vect}((\underbrace{1,-2,1}_{u}), (\underbrace{0,1,0}_{v}), (\underbrace{1,0,3}_{w}))$

or $(u,v,w)$ est libre (le montrer) et elle a 3 élts et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc $(u,v,w)$ est une base de Im f.

Donc $\dim \text{Im} f = 3$ or $\text{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ donc $\text{Im} f = \mathbb{R}^3$ donc $f$ surj

<u>Concl $f$ bijective</u>.

ex 18 TD 24

① Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\alpha u + \beta \phi(u) = 0_E$ $(*)$

alors $\phi(\alpha u + \beta \phi(u)) = \phi(0_E)$

donc $\alpha \phi(u) + \beta \phi^2(u) = 0_E$ car $\phi$ linéaire

donc $\alpha \phi(u) + \beta(-id_E)(u) = 0_E$ car $\phi^2 = -id_E$

donc $\alpha \phi(u) - \beta u = 0_E$ $(\square)$

On multiplie $(*)$ par $\beta$, on obtient $\alpha\beta u + \beta^2 \phi(u) = 0_E$

$(\square)$ par $\alpha$, on obtient $\alpha^2 \phi(u) - \alpha\beta u = 0_E$

On ajoute ces 2 lignes, on obtient $(\alpha^2 + \beta^2)\phi(u) = 0_E$

or $\phi(u) \neq 0_E$. En effet, si $\phi(u) = 0_E$ alors $\phi^2(u) = \phi(0_E)$

donc $-id_E(u) = 0_E$ donc $-u = 0_E$ donc $u = 0_E$ or $u \neq 0_E$

donc $\alpha^2 + \beta^2 = 0_{\mathbb{R}}$ donc $\alpha^2 = \beta^2 = 0_{\mathbb{R}}$ donc $\alpha = \beta = 0_{\mathbb{R}}$

② Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tq $\alpha u + \beta \phi(u) + \gamma w + \delta \phi(w) = 0_E$ $(*)$

alors $\phi(\alpha u + \beta \phi(u) + \gamma w + \delta \phi(w)) = \phi(0_E)$

donc $\alpha \phi(u) + \beta \phi^2(u) + \gamma \phi(w) + \delta \phi^2(w) = 0_E$

donc $\alpha \phi(u) - \beta u + \gamma \phi(w) - \delta w = 0_E$ $(\square)$

On multiplie $(*)$ par $\gamma$ et $(\square)$ par $\delta$ dans le but de faire disparaître $\phi(w)$.

$\alpha\gamma u + \beta\gamma \phi(u) + \gamma^2 w + \delta\gamma \phi(w) = 0_E$ et

$\delta\alpha \phi(u) - \beta\delta u + \delta\gamma \phi(u) - \delta^2 w = 0_E$

On soustrait les deux lignes :

$(\alpha\gamma - \beta\delta) u + (\beta\gamma - \delta\alpha)\phi(u) + (\gamma^2 + \delta^2) w = 0_E$

or $(u, \phi(u), w)$ libre donc en particulier $\gamma^2 + \delta^2 = 0$

donc $\gamma = \delta = 0$. $(*)$ devient donc :

$\alpha u + \beta \phi(u) = 0_E$ or $(u, \phi(u))$ libre (d'après ①)

donc $\alpha = \beta = 0$. Donc $(u, \phi(u), w, \phi(w))$ est libre et son cardinal est 4 donc c'est une base de $E$

③ Soit $X = (x, y, z, t)_{\mathcal{B}}$

alors $X = xu + y\phi(u) + zw + t\phi(w)$

$\phi(X) = x\phi(u) + y\phi^2(u) + z\phi(w) + t\phi^2(w)$

$= x\phi(u) - yu + z\phi(w) - tw$

$= -yu + x\phi(u) - tw + z\phi(w)$

donc $\phi(X) = (-y, x, -t, z)_{\mathcal{B}}$