Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1

Dans cet exercice, les quatre questions sont indépendantes.

1. Etude de trois séries
   (a) Montrer que $\sum_{n\geq 0} \ln(1+2^{-n})$ est une série convergente.
   (b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{3n^4}$ est une série convergente. On pourra utiliser sans démonstration que $\forall n \geq 1, \ln n \leq n$.
   (c) On étudie la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$. Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ le terme général de cette série.
      i. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $u_k = a_{k+1} - a_k$, où $a_k = \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$.
      ii. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Déduire de la question précédente une nouvelle expression de S_n.
      En déduire que $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ converge et calculer sa somme.
2. Etude d'une fonction définie par une intégrale
   On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(x) = \int_x^{3x} e^{-t^2} \mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\varphi(x)$ existe.
   (b) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer φ'.
   (c) Proposer un encadrement de $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, en déduire que φ admet une limite en $+\infty$ et préciser cette limite.
3. Etude d'une application linéaire
   ]Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+y, y-2x+z)$.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. f est-elle injective ?
   (b) Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (c) En utilisant le théorème du rang, déterminer $\mathrm{Im}(f)$. f est-elle surjective ?
4. Etude d'un sous-espace vectoriel
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

   On note également $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ dont le terme constant est nul.

   Montrer que $\mathcal{F}$ est le noyau d'une forme linéaire que l'on précisera. En déduire sans aucun calcul que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.

Exercice 2

1. On considère pour tout entier n non nul la fonction f_n définie pour tout x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par
$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$.
En utilisant la fonction S_n, définie par $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que
$$f_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x) - \sin(x)}{2\sin(x)} \text{ si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } f_n(0) = n \text{ sinon.}$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \frac{ax + bx^2}{\sin(x)}$ si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $g(0) = a$ sinon.
   (a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (c) Montrer que g' est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. On note pour tout entier naturel n non nul :
$$G(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$
   (a) Justifier l'existence de $G(n)$.
   (b) En utilisant une intégration par parties, démontrer que $\lim_{n \to +\infty} G(n) = 0$

4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$? Justifier.

5. L'objet de la suite de l'exercice est de déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
Pour cela on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
et, pour tout couple de réels (a, b) et pour tout entier naturel k non nul, on note
$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2)\cos(2kx)\mathrm{d}x.$$
   (a) Comment nomme-t-on la suite (u_n) par rapport à la série $\sum \frac{1}{n^2}$? Comment nomme-t-on le nombre u_n ?
   (b) Déterminer le couple (a, b) pour que l'on ait, pour toute valeur de k, $I_k = \frac{1}{4k^2}$.
   (c) Dans toute la suite, le couple (a, b) aura la valeur déterminée à la question précédente. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2) f_n(x)\mathrm{d}x$.
   (d) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 2G(2n+1) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (ax + bx^2)\mathrm{d}x$.
   (e) Déduire des résultats précédents la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3

On note $p : x \mapsto \exp(x)$, $q : x \mapsto \exp(2x)$ et $r : x \mapsto \exp(x^2)$.

On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

Partie I

1. On souhaite montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$. Expliquer pourquoi cela revient à montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathcal{E}$. En utilisant le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, d'une application de la forme $\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est un triplet de réels, montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathcal{E}$.

   On rappelle que le développement limité de exp à l'ordre 2, au voisinage de 0 est $\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
2. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $(f(0), f'(0), f(1))$.

3. Prouver que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$.

   Exprimer a, b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$.

Partie II

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap + Bq + Cr$ où

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \dfrac{2}{e(e-1)} f(1) \\ B = -\dfrac{1}{e-1} f(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \\ C = \dfrac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$$

5. On note θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\theta(a, b, c) = (a, b, -c)$.

   Montrer que $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. En déduire que φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.
6. Déterminer $\varphi \circ \varphi$. Que peut-on dire de φ ?

Partie III

7. On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par φ.

   En utilisant la question 5, montrer que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

   Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que f appartienne à $\mathcal{P}$.

   En déduire une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$ et la dimension de $\mathcal{P}$.
8. On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par φ.

   Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. En utilisant la question 5, montrer que $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : f(0) = f'(0) = 0\}$.

   Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b et c pour que f appartienne à $\mathcal{D}$;

   En déduire une base (e_3) de $\mathcal{D}$ et la dimension de $\mathcal{D}$.
9. Montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
10. Caractériser géométriquement l'application φ.