DS9 cor Merci à O. Halgand et aux collègues de l'UPS

Ex 1.

1) a) $\ln(1+2^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^{-n}$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$

or $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}$ cv en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1,1[$

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. De plus, $\ln(1+2^{-n}) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

donc par le th d'équivalence positive, $\boxed{\sum_{n\geq 0} \ln(1+2^{-n}) \text{ cv}}$

1) b) $\forall n \geq 1 \quad 0 \leq \ln n \leq n$ donc $0 \leq \frac{\ln n}{3n^4} \leq \frac{n}{3n^4} = \frac{1}{3n^3}$.

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3n^3}$ cv car la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ cv. $(\alpha = 3 > 1)$

donc par la règle de comparaison des séries à termes positifs,

$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{3n^4} \text{ cv}}$

1) c) i) Soit $k \geq 1$, $u_k = \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right) + \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$= \ln\left(\frac{k+1}{k+2}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \underline{a_{k+1} - a_k}$

ii) Soit $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) \underset{\text{série télescopique}}{=} a_{n+1} - a_1 = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) - \ln\frac{1}{2}$

Comme $\frac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 1 - \ln\frac{1}{2}$

Donc (S_n) cv vers $-\ln\frac{1}{2} = \ln 2$ donc $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$ cv et sa somme est $\boxed{\ln 2}$.

2) a) Soit $x > 0$. $[x, 3x]$ est un segment.

Sur $[x, 3x]$, $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue.

Donc l'intégrale $\int_x^{3x} e^{-t^2} dt$ existe donc $\underline{\varphi(x) \text{ existe}}$

2) b)

On sait que $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$. $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0.

Soit $x > 0$. $\varphi(x) = \int_x^{3x} e^{-t^2} dt = \int_x^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{3x} e^{-t^2} dt = -F(x) + F(3x)$.

Comme F est une primitive de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $F'(x) = e^{-x^2}$

En tant que somme et composées de fcts dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, $\underline{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = -F'(x) + 3F'(3x)$

$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) = -e^{-x^2} + 3e^{-(3x)^2} = \boxed{3e^{-9x^2} - e^{-x^2} = \varphi'(x)}$

2c. Soit $x>0$. Soit $t \in [x, 3x]$

alors $0 < x \leq t \leq 3x$

$0 < x^2 \leq t^2 \leq 9x^2$

$-9x^2 \leq -t^2 \leq -x^2 < 0$

et $0 < e^{-9x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$

Par croissance de l'intégrale, puisque $x < 3x$, on a donc

$$\int_x^{3x} e^{-9x^2} dt \leq \int_x^{3x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{3x} e^{-x^2} dt$$

càd $e^{-9x^2} [t]_x^{3x} \leq \varphi(x) \leq e^{-x^2} [t]_x^{3x}$ par linéarité de l'intégrale

Ainsi $e^{-9x^2} \times 2x \leq \varphi(x) \leq 2x \times e^{-x^2}$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x e^{-9x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x e^{-x^2} = 0$

Donc par le théorème des gendarmes, φ admet une limite en $+\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.}$

3a Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f$ ssi $f(x,y,z) = (0,0)$ ssi $\begin{cases} x+y=0 \\ y-2x+z=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} y=-x \\ z = 2x-y = 3x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ssi $(x,y,z) = (x,-x,3x)$ avec $x \in \mathbb{R}$

Ainsi $\operatorname{Ker} f = \{(x,-x,3x), x \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Ker} f = \{x(1,-1,3), x \in \mathbb{R}\} = \boxed{\operatorname{Vect}(1,-1,3) = \operatorname{Ker} f}$

Comme $\operatorname{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective.

3b $f(1,0,0) = (1,-2)$ $f(0,1,0) = (1,1)$ et $f(0,0,1) = (0,1)$

3c Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et comme $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$ev de dimension 3

par le th du rang, on a $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

d'où $\dim \operatorname{Im} f = 3 - 1 = 2$

En effet, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim(\operatorname{Vect}(1,-1,3)) = 1$ car $(1,-1,3) \neq (0,0,0)$

donc $((1,-1,3))$ est une famille libre en plus d'être génératrice de $\operatorname{Ker} f$. C'est donc une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

De plus $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

et f est surjective

4 $\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = 0\}$ avec $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(0)$

f est une forme linéaire et $\mathcal{F} = \operatorname{Ker} f$. Donc $\mathcal{F}$ sev de $\mathbb{R}_n[X]$

Donc $\mathcal{F}$ est un hyperplan et $\dim(\mathcal{F}) = \dim \mathbb{R}_n[X] - 1 = n+1-1 = n$

$\boxed{\dim \mathcal{F} = n}$

Exercice 2

1. Si $x=0$, alors : $\boxed{f_n(0)=\sum_{k=1}^{n}1=n.}$ car $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \cos(2k\times 0)=\cos(0)=1$

Si $x\neq 0$, alors on a les égalités :

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{2ikx}\right)=\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{2ix}\right)^k\right) && \text{en reconnaissant une somme géométrique}\\
&= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{2ix}\,\frac{1-\mathrm{e}^{2inx}}{1-\mathrm{e}^{2ix}}\right) && \text{en utilisant « l'angle moitié »}\\
&= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{2ix}\,\frac{\mathrm{e}^{inx}}{\mathrm{e}^{ix}}\times\frac{\mathrm{e}^{-inx}-\mathrm{e}^{inx}}{\mathrm{e}^{-ix}-\mathrm{e}^{ix}}\right)\\
&= \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{i(n+1)x}\,\frac{-2i\sin(nx)}{-2i\sin x}\right) && \text{car } \frac{\sin(nx)}{\sin x}\in\mathbb{R}\\
&= \cos\left((n+1)x\right)\times\frac{\sin(nx)}{\sin x}
\end{aligned}
$$

et, grâce à la formule de trigonométrie : $\sin a\,\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$, on obtient donc bien avec $a=nx$ et $b=(n+1)x$ donc $a+b=(2n+1)x$ et $a-b=-x$

$$\boxed{\text{si } x\neq 0,\text{ alors : } f_n(x)=\frac{\sin\left((2n+1)x\right)-\sin x}{2\sin x}.}$$ car sin est impaire

2. **a)** La fonction g est continue et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur de s'annule pas. De plus :

$ax+bx^2=ax+o(ax)$
donc $ax+bx^2\underset{0}{\sim}ax$
et $\sin x\underset{0}{\sim}x$ donc $g(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{ax}{x}=a$, or $g(0)=a$

donc g est continue en 0. De plus, le taux d'accroissement de g en 0 est :

$$\frac{g(h)-g(0)}{h-0}=\frac{\frac{ah+bh^2}{\sin h}-a}{h}=\frac{ah+bh^2-a\sin h}{h\sin h}$$

or $ah+bh^2-a\sin h=ah+bh^2-a(h+o(h^2))=\cancel{ah}+bh^2-\cancel{ah}+o(h^2)$
donc $ah+bh^2-a\sin h\sim bh^2$ De plus $\sin h\sim h$ donc $h\sin h\sim h^2$
Donc $\frac{g(h)-g(0)}{h-0}\sim\frac{bh^2}{h^2}$ donc, $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h-0}=b$ donc $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0)=b}$

b) Pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\boxed{g'(x)=\frac{(a+2bx)\sin x-(ax+bx^2)\cos x}{\sin^2 x}.}$$ et $g'(0)=b$

c) La fonction g' est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, le développement limité du numérateur de $g'(x)$ en 0 à l'ordre 2 s'écrit :
en tant que produit et quotient de fonctions continues

$$(a+2bx)x-(ax+bx^2)\times 1+\mathrm{o}(x^2)=bx^2+\mathrm{o}(x^2),$$

donc on en déduit que :

$g'(x)\sim\frac{bx^2}{x^2}$ $\quad\lim_{x\to 0}g'(x)=b=g'(0),$ donc g' est continue en 0

donc

$$\boxed{g' \text{ est continue sur } \left[0,\tfrac{\pi}{2}\right].}$$

3. **a)** Les fonctions g et $x\mapsto\sin(nx)$ sont continues, donc intégrables, sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ qui est un segment

donc $\boxed{G(n) \text{ est donc définie pour tout } n\in\mathbb{N}^*.}$

b) On pose $u=g$ et $v:x\mapsto-\frac{1}{n}\cos(nx)$. On sait d'après 2c que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ Les fonctions u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on peut effectuer une intégration par parties :

$G(n)=[u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u'(x)v(x)\,dx$ puisque $u'=g'$ et $v':x\mapsto\sin(nx)$

$$
\begin{aligned}
G(n)&=\left[g(x)\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}g'(x)\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{n}\left(a-g\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}g'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Or, d'une part : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(a - g\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) = 0$ et, d'autre part :

g' est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], |g'(x)| \leq M$

Ainsi, $0 \leq \left|\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} g'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} |g'(x)\cos(nx)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} |g'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\,\mathrm{d}x = \frac{M\pi}{2n}$

par croissance de l'intégrale, puisque $|\cos(nx)|\,|g'(x)| \leq 1 \times |g'(x)|$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ puis puisque $|g'(x)| \leq M \; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M\pi}{2n} = 0$

et donc, on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} g'(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0.$

par le théorème des gendarmes, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} G(n) = 0.}$

4- $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ est une série qui converge}}$ car c'est une série de Riemann ($\alpha = 2 > 1$)

5a- (u_n) est la suite des sommes partielles associée à $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et u_n est la somme partielle d'ordre n

5b- Pour tout $(a, b, k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
I_k &= \int_0^{\pi/2} (ax + bx^2)\cos(2kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[(ax + bx^2)\frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (a + 2bx)\frac{\sin(2kx)}{2k}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2k}\int_0^{\pi/2} (a + 2bx)\sin(2kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2k}\left(\left[(a + 2bx)\frac{-\cos(2kx)}{2k}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2b\,\frac{-\cos(2kx)}{2k}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{2k}\left(-\frac{(a + b\pi)(-1)^k - a}{2k} + \frac{b}{k}\int_0^{\pi/2}\cos(2kx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{(a + b\pi)(-1)^k - a}{4k^2} - \frac{b}{2k^2}\left[\frac{\sin(2kx)}{2k}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{(a + b\pi)(-1)^k - a}{4k^2}
\end{aligned}$$

Grâce à une intégration par parties

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$u(x) = ax + bx^2$ $\quad v'(x) = \cos(2kx)$

$u'(x) = a + 2bx$ $\quad v(x) = \frac{\sin(2kx)}{2k}$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Grâce à une intégration par parties

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$u(x) = a + 2bx$ $\quad v'(x) = \sin(2kx)$

$u'(x) = 2b$ $\quad v(x) = -\frac{\cos(2kx)}{2k}$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit donc que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, I_k = \frac{1}{4k^2}$ ssi $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $(a + b\pi)(-1)^k = 0$ et $-a = 1$

$$\boxed{\left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ I_k = \frac{1}{4k^2}\right) \Leftrightarrow \left(a = -1 \text{ et } b = \frac{1}{\pi}\right).}$$

5-c On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
4\int_0^{\pi/2} (ax + bx^2) f_n(x)\,\mathrm{d}x &= 4\int_0^{\pi/2}\left((ax + bx^2)\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)\right)\mathrm{d}x \\
&= 4\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}(ax + bx^2)\cos(2kx)\,\mathrm{d}x \\
&= 4\sum_{k=1}^{n} I_k,
\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale

et donc, d'après 1°) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\int_0^{\pi/2}(ax + bx^2) f_n(x)\,\mathrm{d}x = u_n.}$$

5-d Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après le 1°)

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)x\right) - \sin x}{2\sin x} = \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{2\sin x} - \frac{1}{2}.$$

Donc par linéarité de l'intégrale,

$$u_n = 4\int_0^{\pi/2}(ax + bx^2)\frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{2\sin x}\,\mathrm{d}x - 4\int_0^{\pi/2}(ax + bx^2)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x,$$

la première intégrale ayant un sens d'après **3°)a)** car g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$u_n = 2\int_0^{\pi/2} \frac{ax+bx^2}{\sin x}\,\sin\left((2n+1)x\right)\mathrm{d}x - 2\int_0^{\pi/2}(ax+bx^2)\,\mathrm{d}x,$$

soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2G(2n+1) - 2\int_0^{\pi/2}(ax+bx^2)\,\mathrm{d}x.}$$

5-e

Or :

$$\int_0^{\pi/2}(ax+bx^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{ax^2}{2}+\frac{bx^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a\pi^2}{8}+\frac{b\pi^3}{24},$$

ce qui donne puisque $a=-1$ et $b=\frac{1}{\pi}$:

$$\int_0^{\pi/2}(ax+bx^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Enfin, puisque d'après **3°)b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} G(n) = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \text{donc } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 3

6/

I ① $\mathcal{E} = \text{Vect}(\mathcal{B})$ donc $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$

Une base de $\mathcal{E}$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$

Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre sur $\mathbb{R}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

Ecrivons le $DL_2(0)$ de la fonction $\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r$

$$(\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r)(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{x^2} = \lambda_1 (1$$
$$= \lambda_1\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \lambda_2\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) + \lambda_3\left(1 + x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + x(\lambda_1 + 2\lambda_2) + x^2\left(\frac{\lambda_1}{2} + 2\lambda_2 + \lambda_3\right) + o(x^2)$$

or $\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r = 0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ donc tous les coefficients du DL sont nuls donc
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\lambda_1}{2} + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ -\lambda_2 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} -2\lambda_2 + \lambda_2 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{cases}$$

ssi $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1 = 0$

Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre et c'est donc une base de $\mathcal{E}$

② $\dim(\mathcal{E}) = \text{Card}(\mathcal{B}) = 3$

③ Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{E}$ et λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} \psi(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(0), (\lambda f + \mu g)'(0), (\lambda f + \mu g)'(1)) \\ &= (\lambda f(0) + \mu g(0), \lambda f'(0) + \mu g'(0), \lambda f(1) + \mu g(1)) \\ &= \lambda(f(0), f'(0), f(1)) + \mu(g(0), g'(0), g(1)) = \lambda\psi(f) + \mu\psi(g) \end{aligned}$$

ψ est donc linéaire. De plus, soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$: $f \in \text{Ker}\,\psi$ ssi $(f(0), f'(0), f(1)) = (0,0,0)$

or $f'(x) = ap(x) + 2bq(x) + 2cxr(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f'(0) = ap(0) + 2bq(0) = a + 2b$.

donc $f \in \text{Ker}(\psi) \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b = 0 \\ ea + e^2 b + ec = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - eL_1}{\iff} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b = 0 \\ (e^2 - e)b = 0 \end{cases}$

d'où $f \in \text{Ker}\psi \leftrightarrow a = b = c = 0$ donc ψ est injective et comme $\mathcal{E}$ et $\mathbb{R}^3$ ont mme dimension, on en déduit que ψ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}^3$.

④ Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$:

$$\psi(f) = (f(0), f'(0), f(1)) \iff \begin{cases} a + b + c = f(0) \\ a + 2b = f'(0) \\ ea + e^2 b + ec = f(1) \end{cases}$$
$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - eL_1 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2}}{\iff} \begin{cases} -b + c = f(0) - f'(0) \\ a + 2b = f'(0) \\ (e^2 - e)b = f(1) - ef(0) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \dfrac{2}{e-1} f(0) + f'(0) - \dfrac{2}{e(e-1)} f(1) \\ b = -\dfrac{1}{e-1} f(0) + \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \\ c = \dfrac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) + \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$$

Rq : Ainsi $\psi^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = Cp + Dq + Er$ avec $\begin{cases} C = \dfrac{2}{e-1}\alpha + \beta - \dfrac{2}{e(e-1)}\gamma \\ D = -\dfrac{1}{e-1}\alpha + \dfrac{1}{e(e-1)}\gamma \\ E = \dfrac{e-2}{e-1}\alpha - \beta + \dfrac{1}{e(e-1)}\gamma \end{cases}$

II ⑤ Soit $f = ap + bq + cr \in \mathcal{E}$.

$$\varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi (f) = \varphi^{-1}\big(\theta(\varphi(f))\big) = \varphi^{-1}\big(\theta(f(0), f'(0), f(1))\big)$$

$$= \varphi^{-1}\big(f(0), f'(0), -f(1)\big)$$

cf I④ $\Big\{ = \left(\frac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \frac{2}{e(e-1)} f(1)\right) p + \left(\frac{-1}{e-1} f(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1)\right) q$

$$+ \left(\frac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \frac{1}{e(e-1)} f(1)\right) r$$

$$= Ap + Bq + Cr$$

$$= \varphi(f)$$

Donc $\underline{\varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi = \varphi}$

Comme φ^{-1}, θ et φ sont des applications linéaires, φ est une application linéaire en tant que composée.

On sait que φ est bijective (cf I3). De plus $\theta \circ \theta = id_{\mathbb{R}^3}$ donc θ est aussi bijective. Donc en tant que composée d'applications bijectives, φ est bijective

Enfin si $f \in \mathcal{E}$, $\varphi(f) \in \mathcal{E}$ par définition donc φ est un endomorphisme

Concl : φ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

⑥ $\varphi \circ \varphi = (\varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi) = \varphi^{-1} \circ \theta \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \theta \circ \varphi$

$$= \varphi^{-1} \circ (\theta \circ \theta) \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = \boxed{id_{\mathcal{E}} = \varphi \circ \varphi}$$

Comme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi \circ \varphi = id_{\mathcal{E}}$, on en déduit que φ est une symétrie

III ⑦ D'après II ⑤, $\varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi = \varphi$ donc $\theta \circ \varphi = \varphi \circ \varphi$

Ainsi pour $f \in \mathcal{E}$, $\varphi(f) = f$ ssi $\varphi \circ \varphi(f) = \varphi(f)$

ssi $\theta \circ \varphi(f) = \varphi(f)$

ssi $\theta(f(0), f'(0), f(1)) = (f(0), f'(0), f(1))$

ssi $(f(0), f'(0), -f(1)) = (f(0), f'(0), f(1))$

ssi $-f(1) = f(1)$

ssi $f(1) = 0$

Donc $\boxed{\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{E},\ f(1) = 0\}}$

Or
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$
- $0_{\mathcal{E}} \in \mathcal{F}$ car $0_{\mathcal{E}}(1) = 0$ et $0_{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in \mathcal{F}^2$, $\alpha f + g \in \mathcal{E}$ et $(\alpha f + g)(1) = \alpha f(1) + g(1) = \alpha 0 + 0 = 0$
  donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (f,g) \in \mathcal{F}^2$, $\alpha f + g \in \mathcal{F}$

Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ sev de } \mathcal{E}}$

Soit $f = ap + bq + cr \in \mathcal{E}$. $f \in \mathcal{F}$ ssi $f(1) = 0$ ssi $ap(1) + bq(1) + cr(1) = 0$

Donc $f \in \mathcal{P}$ ssi $ae + be^2 + ce = 0$ ssi $\boxed{a + be + c = 0}$ ssi $c = -a - be$ 8/8

Ainsi $\mathcal{P} = \{ap + bq + cr, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c = -a - be\} = \{ap + bq + (-a - be)r, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

$= \{a(p - r) + b(q - er), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \underline{\mathrm{Vect}(p - r, q - er) = \mathcal{P}}$

Donc $(p - r, q - er)$ est une famille génératrice de $\mathcal{P}$

De plus elle est libre car $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1(p - r) + \lambda_2(q - er) = 0 \Rightarrow \lambda_1 p + \lambda_2 q + (-\lambda_1 - e\lambda_2) r = 0$

or $(p, q, r) = \mathcal{B}$ est libre donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ainsi $(\underbrace{p - r}_{e_1}, \underbrace{q - er}_{e_2})$ est une $\underline{\text{base de } \mathcal{P} \text{ et } \dim(\mathcal{P}) = 2}$

(8)

- $\mathcal{D}$ est inclus dans $\mathcal{E}$ et est non vide car $0_{\mathcal{E}}$ appartient $\mathcal{D}$.
- Si f et g appartiennent $\mathcal{D}$ et λ et μ sont deux réels : $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g) = -(\lambda f + \mu g)$ donc $\lambda f + \mu g$ appartient $\mathcal{D}$.

donc $\underline{\mathcal{D} \text{ est un sev de } \mathcal{E}}$

D'après l'égalité vue au 5, $\varphi(f) = -f$ équivaut $(\theta \circ \psi)(f) = -\psi(f)$ ce qui revient $(f(0), f'(0), f(1)) = (-f(0), -f'(0), f(1))$ soit $\underline{f(0) = f'(0) = 0}$.

Donc $ap + bq + cr \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overline{(ap + bq + cr)(0) = (ap + bq + cr)'(0) = 0}$.

Un système d'équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = -2b \\ c = b \end{cases}}$

Donc $\mathcal{D} = \{b(-2p + q + r), b \in \mathbb{R}\} = \underline{\mathrm{Vect}(e_3)}$ avec $\underline{e_3 = -2p + r + p}$. Or $e_3 \neq 0$. e_3 est donc une base de $\mathcal{D}$: $\underline{\mathcal{D} \text{ est de dimension } 1}$.

(9) Soit f un élément de $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$. Alors $\varphi(f) = f = -f$ donc $f = 0_{\mathcal{E}}$. Ainsi $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} \subset \{0_{\mathcal{E}}\}$. De plus $\{0_{\mathcal{E}}\} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ (intersection de 2 sev de $\mathcal{E}$)

Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{0_{\mathcal{E}}\}$

De plus $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{D}$. D'où $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.

(10) on sait déjà que $\varphi \circ \varphi = id_{\mathcal{E}}$ donc $\varphi \circ \varphi(e_1) = e_1$

$\varphi \circ \varphi(e_2) = e_2$

$\varphi \circ \varphi(e_3) = e_3$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(e_1) = e_1 \\ \varphi(e_2) = e_2 \end{array}\right\}$ car $e_1 \in \mathcal{P}$ et $e_2 \in \mathcal{P}$

$\varphi(e_3) = -e_3$ car $e_3 \in \mathcal{D}$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont supplémentaires donc (e_1, e_2, e_3), concaténation d'une base de $\mathcal{P}$ avec une base de $\mathcal{D}$, est une base de $\mathcal{E}$.

$\underline{\varphi \text{ est la symétrie par rapport à } \mathcal{P} \text{ parallèlement à } \mathcal{D}}$

car pour tout $f \in \mathcal{E}$, comme (e_1, e_2, e_3) base de $\mathcal{E}$, il existe un unique triplet $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ tel que $f = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3$

et $\varphi(f) = a'\varphi(e_1) + b'\varphi(e_2) + c'\varphi(e_3)$

$$\varphi(f) = \underbrace{a'e_1 + b'e_2}_{\text{on garde la composante sur } \mathcal{P} \text{ de } f} \underbrace{- c'e_3}_{\text{on prend l'opposé de la composante sur } \mathcal{D} \text{ de } f}$$