Semaine du 02/06

Chapitre 25 : Séries

Vocabulaire propre aux séries : terme général, suite des sommes partielles, nature, somme lorsque la série converge, reste d'ordre n.
La somme de deux séries convergentes est convergente, le produit d'une série convergente par un scalaire est une série convergente, une combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente.
Situation de divergence grossière (si $\lim u \neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge).
Séries de référence : série harmonique, séries géométriques, séries télescopiques, séries de Riemann.
Séries à termes positifs : convergence ssi la suite des sommes partielles est majorée. Comparaison série-intégrale. Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Théorème d'équivalence. Comparaison série-série.

Convergence absolue : définition. Toute série numérique absolument convergente est convergente. Inégalité triangulaire. Règle de domination.
Séries alternées : définition. Critère des séries alternées.
Obtention de la nature d'une série à l'aide d'un développement asymptotique.

Démonstration :
- critère des séries alternées

Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Cas particulier des endomorphismes.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau, image et rang d'une matrice. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n. Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice tri- angulaire. Lien entre les diverses notions de rang. Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

Changements de bases Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vec- teur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endo- morphisme. Exemples de recherche d'une base dans laquelle la ma- trice d'un endomorphisme donné est simple.

Matrices semblables et trace Matrices semblables. Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée. Trace d'une matrice carrée. Notation $\mathrm{tr}(A)$. Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(\mathrm{uv}) = \mathrm{tr}(\mathrm{vu})$. Notation $\mathrm{tr}(u)$.

Matrices équivalentes et rang Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r. La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1. Matrices équivalentes. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r. Classification des matrices équivalentes par le rang. Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites. Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élé- mentaires conservent le rang.

Systèmes linéaires Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A. Structure affine de l'ensemble des solutions. Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution. Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Démonstrations :
- $\diamond\diamond$ formule de changement de bases pour une application linéaire (paragraphe 2.3)
- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. M est inversible ssi $\text{rg}(M) = n$ (propr 11).
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases de E (propr 6).
- $\diamond$ A est de rang r ssi A est équivalente à J_r (propr 18)

Chapitre 27 : dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini Cardinal d'un ensemble fini. Notations —A—, Card(A). Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quel- conque, complémentaire, différence, produit cartésien. La formule du crible est hors programme. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n. Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Démonstrations :
- $\diamond\diamond$ Cardinal du complémentaire, d'une union de deux ensembles finis quelconques, de l'ensemble des parties de E (propr 4, 5 et 15)
- $\diamond$ Démonstration combinatoire de la formule du triangle de Pascal (propr 13.2)

Les élèves qui doivent avoir colle lundi 9 juin doivent envoyer un message à leur colleur pour demander à décaler la colle un autre jour de la semaine. Passez par le cahier de prépa (icône enveloppe) pour contacter le colleur.

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ et sur l'un des exercices suivants :
- Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n)}{e^n + n}$ sous remarque 7 chapitre 25
- Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$
- Soient $E = \mathbb{K}_p[X]$, $F = \mathbb{K}^n$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Soient $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \cdots, X^p)$ et $\mathcal{B}' = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
  On pose $\phi : : \ E \to F, \ P \mapsto (P(a_1), \cdots, P(a_n))$. Ecrire $\text{mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\phi)$.

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.

Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. En particulier chaque élève devra définir l'un des 4 termes suivants : p-liste, p-arrangement, p-combinaison, permutation d'un ensemble à n éléments (et en préciser le nombre) puis il devra déterminer rapidement le rang d'une matrice et la nature d'une série dont le terme général n'est pas de signe constant. Les exercices porteront ensuite sur le dénombrement, sur la formule de changement de bases, sur les matrices équivalentes, sur la résolution d'un système et son interprétation, sur les systèmes de Cramer ou sur les séries (développement asymptotique par exemple). Un soin particulier sera apporté au vocabulaire employé dans les exercices sur le dénombrement et sur les séries. Il faut bien maitriser le vocabulaire.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de

maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime $\diamond$
Gressier Corentin
Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien
Le Gociv Edenn