DM14 pour le mardi 10 juin

Exercice 1 : ensembles dénombrables

On dit que deux ensembles E et F sont équipotents s'il existe une bijection de E sur F.
On dit que l'ensemble E est dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$ ou à un sous ensemble de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que les ensembles $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable (si besoin voir ex 1 TD5).
3. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Pour cela on étudiera l'application $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ telle que $\varphi(n, p) = 2^n(2p+1)$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable. Pour cela on étudiera l'application $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(a_1, \cdots, a_k) = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ où p_1,..., p_k sont des nombres premiers.
5. En déduire que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
6. Question facultative. On souhaite montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
   (a) L'application $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ telle que $\varphi(p, q) = \frac{p}{q}$ est-elle injective ? surjective ?
   (b) Montrer que si $f : E \to F$ est surjective et si E est un ensemble dénombrable alors F est un ensemble dénombrable.
   (c) Déduire des questions précédentes que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 2 : formule de Stirling

On souhaite ici démontrer la formule de Stirling.

1. On souhaite d'abord montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
   (a) Montrer que cela revient à montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n)$.
   (b) Montrer que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est une série convergente.
   (c) Conclure.
2. Il s'agit maintenant de déterminer K. Pour cela, on utilise le résultat obtenu au DM12 sur les intégrales de Wallis : d'une part $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$ et d'autre part, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
   En travaillant la limite de $\sqrt{2n} I_{2n}$, montrer que $K = \sqrt{2n}$.

Exercice 3 : série exponentielle

On souhaite montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$. Appliquer la formule de Taylor reste intégral entre 0 et $|z|$ à l'ordre N à $x \mapsto e^x$.
2. On pose pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!}$. Montrer que (S_N) est croissante et majorée.
3. Conclure sur la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Que peut on dire de la suite $(\frac{|z|^n}{n!})_{n \geq 0}$?