Semaine du 10/06

Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires

en exercices

Chapitre 27 : dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini Cardinal d'un ensemble fini. Notations —A—, Card(A). Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quel- conque, complémentaire, différence, produit cartésien. La formule du crible est hors programme. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n. Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Démonstrations :

— Cardinal de la réunion de deux ensembles finis disjoints (propr 3)

— $\diamond$ Cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis (propr 6, voir cahier de prépa)

Chapitre 28 : déterminant

Formes n-linéaires alternées Forme n -linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n. Antisymétrie, effet d'une permutation. Si f est une forme n -linéaire alternée et si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, ..., x_n) = 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base Si B est une base, il existe une unique forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(B) = 1$; toute forme n -linéaire alternée est un multiple de $\det_B$. Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Dans R^2 (resp. R^3), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède). Comparaison, si e et e_0 sont deux bases, de $\det_B$ et $\det_{B_0}$. La famille $(x_1, ..., x_n)$ est une base si et seulement si $\det_B(x_1, ..., x_n) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée Déterminant d'une matrice carrée. Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. Déterminant d'un produit. Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles. L'application det induit un morphisme de $GL(E)$ (resp. $GLn(\mathbb{K})$) sur $\mathbb{K}$. Déterminant d'une transposée. Caractère n -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

Calcul des déterminants Effet des opérations élémentaires. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire.

Démonstrations :

— Dimension 2 : expression d'une forme bilinéaire alternée dans une base en fonction des coordonnées. Si B est une base, il existe une unique forme bilinéaire alternée f pour laquelle $f(B) = 1$; toute forme bilinéaire alternée est un multiple de f(propr 5 items 0, 1 et 2)

— $\diamond$ $\diamond$ Soit φ une forme trilinéaire sur E. φ est alternée si et seulement si elle est antisymétrique (propr 8).

— $\diamond$ Soit σ une permutation de $[[1, n]]$. On définit sur $[[1, n]]$ la relation binaire R suivante : $i_1 \ R \ i_2$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z} \ i_2 = \sigma^k(i_1)$. R est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de x pour R est l'ensemble $\{x, \sigma(x), \ \cdots \ , \ \sigma^{p-1}(x)\}$ (orbite de x) (propr 12).

— Cas général : expression d'une forme n-linéaire alternée dans une base en fonction des coordonnées (propr 15 puis 19.0).

— $\diamond$ $\diamond$Propriétés du déterminant d'un endomorphisme (propr 24)

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$,
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \det(\alpha u) = \alpha^n \det(u)$,
3. $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2,\ \det(u \circ v) = \det u \times \det v$,
4. $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ u \in GL(E)$ ssi $\det u \neq 0$ et dans ce cas $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det u}$.

Les élèves qui doivent avoir colle lundi 9 juin doivent envoyer un message à leur colleur pour demander à décaler la colle un autre jour de la semaine. Passez par le cahier de prépa (icône enveloppe) pour contacter le colleur.

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent un ou deux $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Les élèves $\diamond\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations qui contiennent deux $\diamond$ et sur l'un des exercices suivants :

— Déterminer la signature de la permutation suivante de S_{10} : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

— Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

— Montrer que $\varphi :\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Merci de proposer aux élèves $\oplus$ des exercices plus abstraits et théoriques.
Il y a deux groupes de colles vides : les groupes 7 et 14.

Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra déterminer la signature d'une permutation après l'avoir décomposée en produit de permutations puis développer suivant une ligne ou une colonne pour déterminer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 simple. Les exercices porteront ensuite sur le calcul du déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme ou d'une matrice, sur les propriétés du déterminant ou des formes bilinéaires, n-linéaires alternées, les permutations (classes d'équivalence ou puissances), ou sur le dénombrement. Un soin particulier sera apporté au vocabulaire employé dans les exercices sur le dénombrement.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 François Matti
Fournet Simon
Douay Zoé

G2 Lozay-Vandenberghe Titouan
Savodnik Nicolaj $\oplus$
Postel Esteban $\diamond$

G3 Boulard Louna (LV2) $\diamond\diamond$
Dairaine Nathan
Chable Noa

G4 Senente Simon
Deblangy Edouard
Kraniki Enes

G5 Bève Enzo $\diamond$
Vilbert Lilian
Cozette Lise

G6 Mete Ilhan
Felix Julien
Gautherin Jules (LV2) $\oplus$

G8 Thiou Maxime $\diamond$
Gressier Corentin

Gentil Thibaud

G9 Morchid Hiba
Personne Tom
Landot Carla $\diamond$

G10 Cornet Chloé
Buisine Marine
Debeauvais Clara

G11 Caron Alexandre
Simon Robert $\diamond\diamond$
Fourel Maïa

G12 Catto Gabriel
Fournier Antoine

G13 Karafi Ahmed $\diamond$
Faye Cheikh-Tidiane
Gouacide Mathys $\diamond$

G15 Canon Asybiade $\diamond$
Loudahi Abraham
Ramzi Sara $\oplus$

G16 : Moussaïd Soufiane $\oplus$
Watel Aurélien
Le Gociv Edenn