

• Dem P 32

1/2

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

Soient $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A

$$\text{Soit } j \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_B(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \underbrace{\det_B(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)}_{D_{ij}} \end{aligned}$$

Posons $D_{ij} = \det_B(C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Montrons que $D_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

dem P32 suite

2/2

$$\det_B (C_1, \dots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

on échange les colonnes i et $n-k+1$ pour k allant de j à $n-1$

cela a pour impact de multiplier le déterminant par $(-1)^{n-j}$ car il y a $n-1-j+1$ échanges (P221)

$$= (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & & a_{2n} & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & & a_{in} & 1 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-j} (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} & 1 \end{vmatrix}$$

on échange les lignes $n-k$ et $n-k+1$ pour k allant de i à $n-1$ il y a $n-1-i+1$ c-à-d $n-i$ échanges (P29-1)

P30

$$= (-1)^{2n} \times \frac{1}{(-1)^{i+j}} \times 1 \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-1)^{i+j} \times \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \text{ car l'inverse de } -1 \text{ est } -1$$

$$\text{Donc } D_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

$$\text{et } \det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

Même raisonnement pour un développement par rapport à une ligne L_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ -

9. Comatrice

Ecrivons $\text{Com}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 14 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} +(-14) & -(7-28) & +1 \\ -(35-7) & +(6 \times 7 - 2 \times 7) & -(-4) \\ +70 & -(6 \times 14 - 7) & +(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 21 & 1 \\ -28 & 28 & 4 \\ 70 & -77 & -5 \end{pmatrix}$$

• demo P34.

on pose $B = \text{Com}(A) = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ - On a $b_{kj} = (-1)^{j+k} \Delta_{kj}$

et $C = B^T = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$

$D = A \times \text{Com}(A)^T = (d_{ik})_{1 \leq i, k \leq m}$

Sont $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} c_{jk} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{kj} = \sum_{j=1}^m a_{ij} (-1)^{j+k} \Delta_{kj} \quad (*)$$

• Si $i=k$ alors $d_{ii} = \sum_{j=1}^m a_{ij} (-1)^{j+i} \Delta_{ij} = \det(A)$ par P32
développement suivant L_i

• Si $i \neq k$ on pose $A' = (a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ la matrice obtenue à partir de A en mettant la i^{e} ligne dans la k^{e} ligne.

Si on note $L_1, \dots, L_m$ les lignes de A , alors les lignes de A' sont $L_1, \dots, L_{i-1}, L_i, L_{i+1}, \dots, L_{k-1}, L_i, L_{k+1}, \dots, L_m$ donc $\det(A') = 0$ (deux lignes identiques)

or $\det(A') = \sum_{j=1}^m a'_{kj} (-1)^{j+k} \Delta'_{kj}$ par P32 dev't suivant la k^{e} ligne

or par construction on a: $a'_{kj} = a_{ij}$ (la k^{e} ligne de A' est la i^{e} ligne de A)

et $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \Delta'_{kj} = \Delta_{kj}$ puisque toutes les lignes de A' sauf la k^{e} sont identiques aux lignes de A et puisque Δ'_{kj} est le déterminant de la matrice extraite de A' obtenue en supprimant la k^{e} ligne et la j^{e} colonne

Donc $\det(A') = \sum_{j=1}^m a_{ij} (-1)^{j+k} \Delta_{kj} = d_{ik}$ d'après (*)

donc comme $\det(A') = 0$ on a $d_{ik} = 0$

Concl: $A \times \text{Com}(A)^T = \det(A) \times I_m$ - Même raisonnement pour $\text{Com}(A)^T \times A = \det(A) I_m$.