

TD 27

ex 1

$$\varphi: \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

- φ est linéaire

$$P \mapsto (X^2-1)P' - (2X+1)P$$

Soit B base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. $B = (1, X, X^2)$

$$\text{mat}_B(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix} = M$$

$$\text{car } \varphi(1) = -2X-1$$

$$\varphi(X) = X^2-1 - (2X+1)X = X^2-1-2X^2-2X = -X^2-2X-1$$

$$\begin{aligned} \varphi(X^2) &= (X^2-1)2X - (2X+1)X^2 = 2X^3-2X-2X^3-X^2 \\ &= -X^2-2X \end{aligned}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tq $P = aX^2 + bX + c$

$$\varphi(P) = a\varphi(X^2) + b\varphi(X) + c\varphi(1) \text{ car } \varphi \text{ lin}$$

$$\varphi(P) = a(-X^2-2X-1) + b(-X^2-2X-1) + c(-2X-1)$$

$$\text{donc } \varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$$

Donc φ est un endomorphisme

$$\varphi \text{ bij si } M \text{ inv si } \det(M) \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{évol. } 1. \text{ de } C_1} -1 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{donc } \det(M) \neq 0$$

$$\text{donc } \varphi \text{ bij}$$

$$\text{donc } \varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X]$$

TD 27 Soit $a \in \mathbb{R}$

ex 2 A est inv si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dével } 1. \text{ de } C_1} 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = a-1 - 2 \times 3 = a-1-6 = a-7$$

$$\det(A) \neq 0 \text{ si } a-1-6 \neq 0 \text{ si } a \neq 7$$

ex 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice associée au système.

le système est de Cramer si A est inversible si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 2-3k \\ 0 & -1 & -1-2k \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dével } 1. \text{ de } C_1} 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 2-3k \\ -1 & -1-2k \end{vmatrix}$$

$$= 2(1+2k) - (2-3k) \times (-1) = 2+4k+2-3k = 4+k$$

$$\det(A) \neq 0 \text{ si } k \neq -4.$$

Supposons $k \neq -4$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com}(A))^T$$

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -10 & 7 & 1 \\ 2+3k & -1-2k & 1 \\ 4-4k & -2+3k & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{-1} = \frac{1}{4+k} \begin{pmatrix} -10 & 2+3k & 4-4k \\ 7 & -1-2k & -2+3k \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4+k} \begin{pmatrix} -10 + k(2+3k) + 4 - 4k \\ 7 + k(-1-2k) + (-2+3k) \\ 1 + k - 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4+k} \begin{pmatrix} -6 - 2k + 3k^2 \\ 5 + 2k - 2k^2 \\ k - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Concl} \quad S = \left\{ \left(\frac{-6-2k+3k^2}{4+k}, \frac{5+2k-2k^2}{4+k}, \frac{k-1}{4+k} \right) \right\}$$