TD27

E1 - 1) a) on peut matérialiser un résultat de l'expérience par une 6-liste de l'ensemble $\{B, N\}$
Le nombre de résultats distincts est le cardinal de $\{B, N\}^6$
c'est-à-dire $2^6 = 64$

1) b) i) Il n'y a qu'un seul résultat : (N, N, N, N, N, B)

ii) Il n'y a qu'un seul résultat n'amenant aucune boule blanche : (N, N, N, N, N, N).
La formule portant sur le cardinal du complémentaire d'un ensemble permet de conclure : le nombre de résultats est : $2^6 - 1 = 63$ (P4)

iii) Soit on n'obtient aucune boule noire → un seul résultat (B, B, B, B, B, B)
soit on obtient une boule noire → six résultats suivant la place de l'unique boule noire dans le 6-uplet
Par P3, le nombre de résultats est : $1 + 6 = 7$

iv) on raisonne par choix successifs :
- on choisit les 2 emplacements des 2 boules blanches parmi les 6 emplacements dans le 6-uplet qui correspondent aux 6 tirages : il y en a $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$
- une fois ce choix fait on choisit les 4 emplacements pour les 4 boules noires → 1 seule possibilité
Donc il y a $15 \times 1 = 15$ résultats

2) a) on peut matérialiser un résultat par une 6-liste de $[\![1, 13]\!]$
il y a 13^6 résultats distincts

2) b) i) un résultat est un élément de $[\![6, 13]\!]^5 \times [\![1, 5]\!]$
Par P6 il y a $\text{Card}([\![6, 13]\!]^5) \times \text{Card}([\![1, 5]\!])$ résultats,
soit $8^5 \times 5$ résultats

ii) L'ensemble des résultats n'amenant aucune boule blanche est $[\![6, 13]\!]^6$ et son cardinal est 8^6
le nombre de résultats est donc $13^6 - 8^6$ par P4

iii) - Soit on n'obtient aucune boule noire : un tel résultat est un élément de $[\![1, 5]\!]^6$ → 5^6 possibilités
- Soit on obtient une boule noire. Choisissons la place de cette boule : 6 possibilités, puis choisissons le numéro de cette boule : 8 possibilités, enfin choisissons les numéros des 5 boules blanches :

5^5 possibilités. Dans ce cas il y a donc $6 \times 8 \times 5^5$ possibilités
Par P3, le nombre de résultats est : $5^6 + 6 \times 8 \times 5^5$

iv) choix successifs :

- on choisit l'emplacement des 2 boules blanches : $\binom{6}{2}$ possibilités
- on choisit les numéros des 2 boules blanches : 5^2 possibilités
- on choisit l'emplacement des 4 boules noires : $\binom{4}{4}$ possibilités
- on choisit les numéros des 4 boules noires : 8^4 possibilités

Finalement, le nombre de résultats est :
$\binom{6}{2} \times 5^2 \times 8^4$.

E5. 1- On matérialise un tirage par une n-combinaison de l'ensemble $[\![1, a+b]\!]$
Il y a donc $\binom{a+b}{n}$ tirages différents

2- Soit $k \in [\![1, a]\!]$
pour obtenir un tirage comportant k jetons jaunes
- on choisit k jetons jaunes parmi les a jetons jaunes : $\binom{a}{k}$ possibilités
- on choisit $n-k$ jetons verts parmi les b jetons verts : $\binom{b}{n-k}$ possibilités

Le nombre de tirages différents est donc $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$

3- Soit E l'ensemble des tirages de n jetons
Soit G_k = l'ensemble des tirages comportant exactement k jetons jaunes, pour k allant de 0 à n.
On a $E = \bigcup_{k=0}^{n} G_k$ et cette union est disjointe
par P3, $\mathrm{Card}(E) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(G_k)$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.