

① Énoncer la règle de domination (chapitre série) ^{0,5}

Soit (u_n) suite complexe et (v_n) suite d'élé de $\mathbb{R}$ tq $u_n = O(v_n)$ ^{0,5}

alors si $\sum v_n$ CV, $\sum u_n$ CVA donc CV, ^{0,5}

② A l'aide d'un développement asymptotique,

déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

$$\forall n \geq 2, \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + w_n, \text{ avec } w_n = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

or $\sum \frac{1}{n^2}$ CV donc $\sum w_n$ CV et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV par CST donc $\sum v_n$ CV, ^{$w_n \sim -\frac{1}{n^2}$}

③ En calculant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} \times n^{\frac{3}{2}}$, déterminer la nature de $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ ^{$n \geq 1, n^2$}

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} \times n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0, \text{ donc } \frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

donc $\frac{\ln n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, et par le th de domination,

comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ CV, (série de Riemann),}$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} \text{ CV,}$$

④ Donner l'application linéaire canoniquement associée à la

matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x+2y+3z, -x+z)$

①

⑤ Donner la définition de 2 matrices équivalentes de $M_{m,p}(\mathbb{K})$

$A, B \in M_{m,p}(\mathbb{K}),$

A eq à B ssi $(\exists P \in GL_m(\mathbb{K}), \text{ et } \exists Q \in GL_p(\mathbb{K}))$

tq $B = PAQ$

1/2 si m et p OK

1/2 si $B = PAP^{-1}$

⑥ Écrire la matrice de passage P de la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ d'un $\mathbb{K}$ vers E vers la base $B' = (e_1+e_2+e_3, e_1+e_3, -e_1-e_2-3e_3)$ de E

①

$$P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

⑦ Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1+d & 1 & 1 \\ 0 & -d & d & 0 \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

on distinguera 2 cas suivant les valeurs de d

($d \in \mathbb{R}$) si $d=0$ alors $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1,$

si $d \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1+d & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4,$

1,5

cette matrice triangulaire dont les coeff diagonaux sont non nuls $\Rightarrow$ matrice inversable
 $\Rightarrow$ matrice de $\text{rg } 4$

⑧ a) Donner la définition d'une combinaison à p éléments d'un ensemble fini E de cardinal n c'est une partie de E qui a p élts,

b) Donner le cardinal de l'ensemble des combinaisons à p élts de E :
 (E est toujours un ensemble fini à n éléments) $\binom{n}{p},$

⑨ Prévoir $\text{Card}(\mathcal{F}(E, F))$ où E et F sont des ensembles finis de cardinaux respectifs p et m . $\mathcal{F}(E, F)$ est l'ensemble des applications de E vers F . $\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{Card } F)^{\text{Card}(E)} = m^p,$

10 a) On appelle main tout ensemble de 3 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains différentes contenant exactement deux trèfles dont la reine de trèfle? $\binom{1}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{39}{1} = 12 \times 39$

b) On lance trois dés à six faces simultanément. Combien formaliser un résultat? 3 liste de $\llbracket 1, 6 \rrbracket$
 Combien y a-t-il de résultats différents? $6^3,$

c) On forme une anagramme du mot MATHS. Combien formaliser un résultat? permutation de $\{M, A, T, H, S\}$
 Combien y a-t-il de résultats différents? $5!.$

20,5

5) Donner le critère des séries alternées

1,5

$\sum u_n$ une série alternée

si (u_n) décroît et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ alors

+1

$\sum u_n$ CV, et $\forall n$

$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ est de signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

6)

A l'aide d'un développement asymptotique,

et $\sum_{n=0}^{\infty} S \leq S_{n+1}$

ou $S_{n+1} \leq S \leq S_n$

déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \right)$

3,5

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$$

$u_n \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ DV, donc $\sum u_n$ DV, et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV (CSA), donc $\sum u_n$ DV

7)

En calculant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n} \ln n}$, déterminer la nature de $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n} \ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = +\infty,$$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0, \frac{n}{\sqrt{n} \ln n} > 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{n} \ln n} > \frac{1}{n}$,

3

ou $\sum \frac{1}{n}$ DV, car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ DV donc $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ DV

donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ DV par RCSTP

8)

Donner l'application linéaire canoniquement associée à

$$\text{la matrice } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x+2y, -x, 3x+y)$$

1

9)

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1pt Matrices 1pt $M \times$

Donner la définition de $\text{Ker}(M) = \{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \}$

2)

Donner la définition de $\text{Im}(M) = \{ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), MX = Y \}$

0,5 si $\text{Ker} \cap \text{Im}$

10)

Écrire la matrice de passage P de la base $B = (e_1, e_2, e_3)$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E vers la base $B' = (e_1 + e_2 - e_3, e_1 - e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3)$ de E

1

$$P = P_{B, B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \alpha - 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -5 - \frac{\alpha}{4} \end{pmatrix}$ $L_4 \leftarrow L_4 - \alpha L_3$
on distinguera 2 cas suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.

1,5 Si $-5 - \frac{\alpha}{4} \neq 0$ alors $\text{rg}(M) = 4$ (matrices triangulaire dont les coeff diagonaux sont non nuls $\rightarrow$ matrice inversible)
Si $-5 - \frac{\alpha}{4} = 0$ ssi $\alpha = -20$ alors $\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$
car $\text{rang}(B) = \dim(\text{Vect}(L_1, L_2, L_3, L_4))$
 $= \dim(\text{Vect}(L_1, L_2, L_3)) = 3$
car (L_1, L_2, L_3) libre avec la pond des 0

- ② a) Donner la définition d'un p-arrangement d'un ensemble fini E dont le cardinal vaut n c'est une p-liste d'elts

① ~~1~~ def de E .

- b) Donner le cardinal de l'ensemble des p-arrangements d'un ensemble fini E de cardinal n .

① $\frac{n!}{(n-p)!}$

- ③ Préciser $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$ où E est un ensemble fini de cardinal n

① $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

- ④ a) On appelle main tout ensemble de 3 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains différentes contenant une seule reine? $\frac{52}{3} \rightarrow \binom{4}{1} \binom{48}{2}$

- b) On lance deux fois un dé à six faces.

Combien y a-t-il de résultats différents? 6^2

Comment formaliser un résultat? 2-liste de $[1, 6]$

- c) Lors d'une course à pied comprenant 380 participants numérotés de 1 à 380, on s'intéresse aux numéros des trois plus rapides rangés dans l'ordre d'arrivée. Comment formaliser un résultat?

Combien y a-t-il de résultats différents? $\text{per un 3-arrangement de } [1, 380]$
 $380 \times 379 \times 378$