Ex 1

(1) $\sigma_1 = (15)(53)(32)(24)$ donc $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^4 = \underline{1 = \varepsilon(\sigma_1)}$

$\sigma_2 = (174)(2\ 6\ 8\ 10)(3\ 9\ 5) = (17)(74)(26)(68)(8\ 10)(39)(95)$

car $1 \to 7 \to 4 \to 1$

$2 \to 6 \to 8 \to 10 \to 2$

$3 \to 9 \to 5 \to 3$

donc $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^7 = -1 = \underline{\varepsilon(\sigma_2)}$

$\sigma_3 = (13)(3214)(314)(214) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)$

$2 \to 1 \to 4 \to 3 \to 1$

$1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 2$

$4 \to 2 \to 2 \to 1 \to 3$

$3 \to 3 \to 1 \to 4 \to 4$

donc $\varepsilon(\sigma_3) = (-1)^2 = \underline{1 = \varepsilon(\sigma_3)}$

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ existe car $\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$ converge

en effet $\frac{n+1}{n!} \times n^2 \sim \frac{n^3}{n!}$ or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n!} = 0$ donc $\frac{n+1}{n!} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\frac{n+1}{n!} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 2$),

$\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n!}$ CV donc $\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} \text{ CV.}}$ par la règle de domination

Calculons $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1^n}{n!}$$

on reconnait la somme d'une série exponentielle

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + e^1 = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} + e^1 = 2e^1$$

changement d'indice $m = n-1$

Ccl : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e}$

(3) $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ car $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

les 2 matrices ne sont pas colinéaires donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une <u>famille libre et génératrice de F.</u>

C'est une base de F (et $\dim F = 2$)

Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tq

$P = aX^3 + bX^2 + cX + d$

$X^2P(X) = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2$.

$P(X^2) = aX^6 + bX^4 + cX^2 + d$

Ainsi $X^2P(X) = P(X^2)$ ssi $aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 = aX^6 + bX^4 + cX^2 + d$

ssi $aX^6 - aX^5 - cX^3 + (c-d)X^2 + d = 0$

ssi $\begin{cases} a = c = d = 0 \\ c - d = 0 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$ car la famille $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_6[X]$

ssi $P = bX^2,\ b \in \mathbb{R}$

Donc $G = \text{Vect}(X^2)$ et $X^2 \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc (X^2) est une famille libre et génératrice de G. C'est une base de G (et dim $G = 1$)

(4) A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$ ssi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} \neq 0$

or $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{on développe} \\ \text{par rapport à } C_1}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} = a - 1 - 6 = a - 7$

donc A est inversible ssi $a \neq 7$

(5) (a) (i) Un résultat est une 6 liste de l'ensemble $[\![1, 13]\!]$ donc il y a 13^6 résultats distincts

(ii) • 8^6 résultats n'amènent aucune boule blanche donc $13^6 - 8^6$ résultats amènent au moins une blanche (passage au complémentaire)

• on raisonne par choix successifs :

- on choisit la place dans le 6-uplet pour les 2 boules blanches : $\binom{6}{2}$ possibilités
- on choisit les numéros des 2 boules blanches : 5^2
- on choisit la place dans le 6-uplet pour les 4 boules noires : $\binom{4}{4}$ possibilités
- on choisit les numéros des 4 boules noires : 8^4

Il y a donc $\binom{6}{2} \times 5^2 \times 1 \times 8^4 = \frac{6!}{2!4!} \times 5^2 \times 8^4 = 15 \times 25 \times 2^{12}$

(b) (i) Un résultat est une 6 liste d'éléments distincts de $[\![1, 13]\!]$ c'àd un 6 arrangement de cet ensemble. Il y a donc $\frac{13!}{7!} = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ résultats distincts

(ii) • $\frac{8!}{2!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ résultats n'amènent aucune boule blanche donc $\frac{13!}{7!} - \frac{8!}{2!}$ résultats amènent au moins une boule blanche (passage au complémentaire)

- on raisonne par choix successifs et on obtient :
$\underline{\binom{6}{2}\times 5\times 4\times \binom{4}{4}\times 8\times 7\times 6\times 5}$

ⓒ (i) Un résultat est une 6-combinaison d'un ensemble à 13 éléments
Il y a donc $\underline{\binom{13}{6}}$ résultats distincts

(ii) • $\binom{8}{6}$ résultats n'amènent aucune boule blanche donc $\underline{\binom{13}{6}-\binom{8}{6}}$ résultats amènent au moins une blanche (passage au complémentaire)

• on raisonne par choix successifs et on obtient :
$\underline{\binom{6}{2}\times\binom{5}{2}\times\binom{4}{4}\times\binom{8}{4}}$

Exercice 2

① ⓐ $rg(f)=rg(A)=rg\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&1\\0&0&0&\alpha\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $= \underline{2 \text{ si } \alpha=0}$ car les 2 1ères lignes ne sont pas colinéaires et les 2 suivantes sont nulles

$L_2 \leftarrow L_2-2L_1$
$L_4 \leftarrow L_4-\alpha L_1$

$= \underline{3 \text{ si } \alpha\neq 0}$ car les 3 1ères lignes sont linéairement indépendantes

ⓑ • $\underline{\text{si } \alpha=0}$ alors $\dim \mathrm{Im} f=2$ et par le th du rang, comme $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et comme $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie, $\dim\mathbb{R}^4=\dim \mathrm{Im} f+\dim \mathrm{Ker} f$
donc $\dim \mathrm{Ker} f=4-2=2$. De plus $\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4))$
donc $\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2))$ car $C_3=C_4=C_1-C_2$ donc $\underline{((1,2,0,0),(1,+1,0,0)) \text{ est une base de } \mathrm{Im} f}$ (famille génératrice qui a le bon nombre d'éléments)

et comme $C_3=C_4$ et $C_3=C_1-C_2$, on a $f(e_3)=f(e_4)$ et $f(e_3)=f(e_1)-f(e_2)$
donc $f(e_3-e_4)=0_{\mathbb{R}^4}$ et $f(e_3-e_1+e_2)=0_{\mathbb{R}^4}$ donc $\underline{(0,0,1,-1), \text{ et } (-1,1,1,0)}$ sont des vecteurs de Ker f. Or ils sont non colinéaires
donc $\underline{((0,0,1,-1),(-1,1,1,0)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f}$ (famille libre qui a le bon nombre d'éléments).

• $\underline{\text{si } \alpha\neq 0}$ alors $\dim \mathrm{Im} f=3$ et par le th du rang $\dim \mathrm{Ker} f=1$
$\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}((1,1,0,\alpha),(0,+1,0,0),(0,1,\alpha,0))$ car $C_3=C_1-C_2$ donc $C_1=C_2+C_3$
et donc la famille $((1,1,0,\alpha),(0,1,0,0),(0,1,\alpha,0))$ est $\underline{\text{une base de } \mathrm{Im} f}$ car elle est génératrice et a le bon nombre d'éléments
$\mathrm{Ker} f=\mathrm{Vect}((-1,1,1,0))$ car $f(e_3)=f(e_1)-f(e_2)$ donc $e_3-e_1+e_2\in \mathrm{Ker} f$
et $e_3-e_1+e_2\neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $\underline{((-1,1,1,0)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker} f}$ (famille libre qui a le bon nb d'élts).

ⓒ si $\alpha=0$ $\begin{vmatrix}1&1&0&-1\\2&+1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&0\end{vmatrix}$

développt /. à L_4

$= -(-1)\times\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\0&0&1\end{vmatrix} \overset{\text{dévelt /. à } L_3}{=} 1\times\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$

donc $\det_{\mathcal{E}}\big(\overbrace{(1,0,0,0),(1,+1,0,0),(0,0,1,-1),(-1,1,1,0)}^{\text{famille } \mathcal{E}'}\big) \neq 0$

et cette famille, constituée d'une base de Imf concaténée avec une base de Kerf, est une base de $\mathbb{R}^4$. Donc Kerf et Imf sont supplémentaires.

si $\alpha \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & +1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{dével}^t \text{ \% à } L_4}{=} -\alpha \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{dével}^t \text{ \% à } C_1}{=} -\alpha \times (-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha(0+1) = \alpha \neq 0$$

donc $((1,0,0,0),(1,-1,0,0),(0,1,\alpha,0),(-1,1,1,0))$ est ~~une~~ une base de $\mathbb{R}^4$ et Kerf et Imf sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ dans tous les cas

② $\varepsilon_1 = (\lambda,0,0,\alpha)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1,0)$. $\mathcal{B} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

$(\lambda,0,0,\alpha) \in \mathrm{Im}f$ ssi $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $(\lambda,0,0,\alpha) = a(1,1,0,\alpha) + b(0,1,0,0) + c(0,1,\alpha,0)$

ssi $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $\begin{cases} \lambda = a \\ 0 = a+b+c \\ 0 = \alpha c \\ \alpha = a\alpha \end{cases}$

ssi $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tq $\begin{cases} \lambda = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$ car $\alpha \neq 0$.

donc $(\lambda,0,0,\alpha) \in \mathrm{Im}f$ ssi $\lambda = 1$. De plus $\varepsilon_2 \in F$ et $\varepsilon_3 = -\frac{1}{\alpha}(0,1,0,0) + \frac{1}{\alpha}(0,1,\alpha,0) \in F$

et par la place des zéros, ces 3 vecteurs constituent une famille libre or elle a 3 éléments donc c'est une base de Imf qui est de cardinal 3.

Concl : $\mathcal{B}$ est une base de F ssi $\lambda = 1$

③ Comme f est une application linéaire sur $\mathbb{R}^4$
g est une application linéaire sur F (restriction, d'après le cours)
Montrons que g est un endomorphisme de F

Soit $x = a\overbrace{(1,0,0,\alpha)}^{\varepsilon_1} + b\overbrace{(0,1,0,0)}^{\varepsilon_2} + c\overbrace{(0,0,1,0)}^{\varepsilon_3} \in F$

On veut mq $g(x) \in F$

$g(x) = a\, g(1,0,0,\alpha) + b\, g(0,1,0,0) + c\, g(0,0,1,0)$
$= a(\varepsilon_1 + (2+\alpha)\varepsilon_2 + \alpha^2\varepsilon_3) + b(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + c\,\varepsilon_2$ ← calculs p5

donc $g(x)$ est une CL des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ de F

donc $g(x) \in F$

donc g est un endomorphisme de F

$$\boxed{\operatorname{mat}_B(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(\varepsilon_1) & g(\varepsilon_2) & g(\varepsilon_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2+\alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}}$$

$g(\varepsilon_1) = g(1,0,0,\alpha) = (1, 2+\alpha, \alpha^2, \alpha) = (1,0,0,\alpha) + (2+\alpha)(0,1,0,0) + \alpha^2(0,0,1,0)$

donc $g(\varepsilon_1) = 1\,\varepsilon_1 + (2+\alpha)\,\varepsilon_2 + \alpha^2 \varepsilon_3$

$g(\varepsilon_2) = g(0,1,0,0) = (1,1,0,\alpha) = (1,0,0,\alpha) + (0,1,0,0) + 0\,(0,0,1,0)$

$g(\varepsilon_2) = 1\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 0\,\varepsilon_3$

$g(\varepsilon_3) = g(0,0,1,0) = (0,1,0,0) = \varepsilon_2$

(4) $\det(g) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2+\alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{dével}^t \text{ /. à } L_3}{=} \alpha^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 \neq 0$ donc g est inversible

et $\operatorname{mat}_B(g^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \left(\operatorname{Comat}(g)\right)^T = \dfrac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} 0 & +\alpha^2 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & +\alpha^2 \\ 1 & -1 & -1-\alpha \end{pmatrix}^T$

$\operatorname{mat}_B(g^{-1}) = \dfrac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & +1 \\ -\alpha^2 & -\alpha^2 & -1-\alpha \end{pmatrix}$

$$\boxed{\operatorname{mat}_B(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{\alpha^2} \\ -1 & +1 & \frac{-1-\alpha}{\alpha^2} \end{pmatrix}}$$

(5) (a) $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et $(-u)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ donc (u) est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ donc <u>B'</u>, concaténation de B et de (u), <u>est une base de $\mathbb{R}^4$</u>.

(b) **On a:** $h(\varepsilon_1) = g^{-1}(\varepsilon_1)$, $h(\varepsilon_2) = g^{-1}(\varepsilon_2)$ et $h(\varepsilon_3) = g^{-1}(\varepsilon_3)$ et $h(u) = f(u) = 0_{\mathbb{R}^4}$ car $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f) \times \operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(u) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

donc h est définie sur tout vecteur de base de B' donc <u>h est **bien** définie</u>.

(on sait qu'une application linéaire est déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de l'ensemble de départ de l'application).

Comme $h(u)=0_{\mathbb{R}^4}$ on a

$$\mathrm{mat}_{B'}(h) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} h(\varepsilon_1) & h(\varepsilon_2) & h(\varepsilon_3) & h(u) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{-1-\alpha}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ u \end{array} \end{array}$$

(c) $\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(h) = P_{\mathcal{E}B'} \times \mathrm{mat}_{B'}(h) \times P_{B'\mathcal{E}}$ par la formule de changt de base

donc déterminons $P_{\mathcal{E},B'}$ et $P_{B'\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},B'}^{-1}$

$$P_{\mathcal{E},B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + \alpha e_4 \\ \varepsilon_2 = e_2 \\ \varepsilon_3 = e_3 \\ u = e_1 - e_2 - e_3 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} e_1 = u + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ e_2 = \varepsilon_2 \\ e_3 = \varepsilon_3 \\ \alpha e_4 = \varepsilon_1 - e_1 \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} e_1 = u + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ e_2 = \varepsilon_2 \\ e_3 = \varepsilon_3 \\ e_4 = \frac{1}{\alpha}\varepsilon_1 - \frac{1}{\alpha}(u + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \end{cases}$$

$$\text{donc } P_{\mathcal{E},B'}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ u \end{array} \end{array}$$

Ainsi
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{-1-\alpha}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ -1 & 1 & \frac{-1-\alpha}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{1}{\alpha^3} \\ -\frac{1}{\alpha^2} & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & +\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \\ 1 - \frac{1+\alpha}{\alpha^2} & 1 & \frac{-1-\alpha}{\alpha^2} & -\frac{2}{\alpha} + \frac{1+\alpha}{\alpha^3} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & \frac{1}{\alpha^2} & \frac{-1}{\alpha^3} \\ \frac{-1}{\alpha^2} & 0 & \frac{-1}{\alpha^2} & \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3} \\ \frac{\alpha^2-\alpha-1}{\alpha^2} & 1 & \frac{-1-\alpha}{\alpha^2} & \frac{-2\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^3} \\ \frac{1}{\alpha^2} & 0 & \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

(d)
$$ADA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{A = ADA}$$

Exercice 3

1) Il existe $3! = 6$ bijections de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3\}$:

- l'identité qui a 3 pts fixes
- les transpositions $(1\,2)$, $(1\,3)$ et $(2\,3)$ qui ont chacune 1 pt fixe
- les 2-cycles $(1\,2\,3)$ et $(1\,3\,2)$ qui n'ont aucun pt fixe

donc $\underline{D_{3,0} = 2,\ D_{3,1} = 3,\ D_{3,2} = 0 \text{ et } D_{3,3} = 1}$

2) $(P_0, \dots, P_n)$ est une partition de S_n car $P_0, \dots, P_n$ sont 2 à 2 disjoints et leur réunion est égale à S_n. Donc $S_n = \bigcup_{k=0}^{n} P_k$

Donc $\underbrace{\mathrm{Card}(S_n)}_{n!} = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} P_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(P_k) = \underline{\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}}$

3) Pour chaque permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant k points fixes, il y a :

- $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k points fixes : choix de k éléments parmi les n éléments de $[\![1,n]\!]$
- puis $D_{n-k,0}$ possibilités pour choisir une permutation d'un ensemble à $n-k$ éléments, sans point fixe

Par la règle des choix successifs, $\underline{D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}}$

Donc $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} d_j$ $\quad j = n-k$

$$\boxed{n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} d_j} \quad (*)$$

5)

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{p=0}^{n-k} \binom{n-k}{p} d_p \text{ d'après } (*)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n-k} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p} d_p \text{ par lin de la somme}$$

on permute les 2 sommes finies

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p} d_p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-k-p} d_p \quad \text{par symétrie du coeff binomial}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} d_p \left[\sum_{k=0}^{n-p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-p-k} \right] \quad \text{par 4)}$$

$$= \sum_{p=0}^{n} d_p \times \delta_{n-p,0}$$

$$= d_n.$$

4) $$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}} \frac{\cancel{(n-k)!}}{(p-k)!\,(n-p)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{n!}{k!\,p!} \frac{p!}{(p-k)!\,(n-p)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \times \frac{p!}{k!\,(p-k)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{p}\binom{p}{k} \quad \text{lin de la somme}$$

$$= \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \quad \text{bin de Newton}$$

$$= \binom{n}{p} (1+(-1))^p$$

$$= \binom{n}{p} \times 0^p$$

ainsi $\underline{\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0}$ si $p>0$ et $\underline{1 \text{ si } p=0}$

car $\binom{n}{0} = 1$.

6) la probabilité recherchée est $p_n = \dfrac{d_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

or $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ est une série exponentielle. Elle cv donc et

sa somme est égale à e^{-1}

Donc $\boxed{(p_n) \text{ cv vers } \frac{1}{e}.}$

Exercice 4 Soit $n \geq 1$

(1) $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

donc si on pose $k \geq 1$, et si $k \leq t \leq k+1$ alors $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$

et par croissance de l'intégrale, $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$

donc $\frac{1}{k+1} \leq [\ln t]_k^{k+1} \leq \frac{1}{k}$

prenons somme pour k allant de 1 à n. On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

donc $H_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) - \ln 1 \leq H_n$

on a donc d'une part $\ln(n+1) \leq H_n$

et d'autre part $H_{n+1} \leq \ln(n+1) + 1$

donc pour $n \geq 2$ $H_n \leq \ln(n) + 1$

~~Ainsi~~ or $H_1 = 1 \leq \ln 1 + 1$

donc $\forall n \geq 1, H_n \leq \ln n + 1$

Ainsi $\boxed{\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln n + 1}$

(2) $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$

or $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n}))}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

et $1 + \frac{1}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Par le th des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1$ donc $\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n}$

(3) Soit $n \geq 2$. $v_n - v_{n-1} = H_n - \ln(n+1) - H_{n-1} + \ln(n)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - [\ln(n+1) - \ln n]$$

$$= \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = \boxed{\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

(4) $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq x$ donc $\forall n \geq 2$ $\ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$

et donc $\forall n \geq 2$ $\frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \geq 0$ donc $v_n - v_{n-1} \geq 0$

donc (v_n) est une suite croissante

De plus d'après 1,

$\forall n \geq 1$ $H_n \leq 1 + \ln n$ donc $H_n - \ln(n+1) \leq 1 + \underbrace{\ln \frac{n}{n+1}}_{\leq \ln 1 = 0}$

Donc $\forall n \geq 1$, $H_n - \ln(n+1) \leq 1$

Donc $\forall n \geq 1$, (v_n) est majorée par 1 et croissante. Par le th de la limite monotone, elle converge. Soit γ sa limite.

(5) Soit $n \geq 2$, $w_n - w_{n-1} = v_n - \gamma - v_{n-1} + \gamma = v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$

Par ITL appliquée à $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

$\forall x > 0$, $|\ln(1+x) - x| \leq \left|\int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2} dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{x-t}{(1+t)^2}\right| dt$ par l'IT

car $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$
et $f' : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $f'' : x \mapsto -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

Or $\forall x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{x-t}{(1+t)^2}\,dt \leq \int_0^x (x-t)\,dt = \left[\left(xt - \frac{t^2}{2}\right)\right]_0^x = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$

par croissance de l'intégrale
car $\forall t \in [0,x]$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$ et $\left|\dfrac{x-t}{(1+t)^2}\right| = \dfrac{x-t}{1+t^2}$
pour $t \in [0,x]$

Ainsi $\forall x \geq 0$, $|\ln(1+x) - x| \leq \dfrac{x^2}{2}$

Donc $\forall n \geq 2$ $\left|\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right| = \left|\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right| \leq \dfrac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}$

et $\boxed{\forall n \geq 2,\ |w_n - w_{n-1}| \leq \dfrac{1}{2n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}}$.