Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1

Dans cet exercice, les cinq questions sont indépendantes.

1. Déterminer la signature des permutations suivantes : $\sigma_1 = (15324)$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 1 & 3 & 8 & 4 & 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma_3 = (13)(3214)(314)(214)$.
2. Déterminer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ après avoir justifié son existence.
3. Donner une famille génératrice finie puis une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ et du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$: $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(X^2) = X^2P(X)\}$.
4. En utilisant le déterminant, déterminer pour quelles valeurs de a, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13.
   (a) On tire successivement 6 boules de l'urne en y remettant à chaque fois la boule tirée. On appelle résultat la suite ordonnée des six numéros obtenus.
      i. Quel est le nombre de résultats distincts ?
      ii. Combien de résultats amènent au moins une boule blanche ? 2 boules blanches et 4 boules noires dans un ordre quelconque ?

   (b) On tire successivement et sans remise 6 boules de l'urne. On appelle résultat la suite ordonnée des six numéros obtenus. Reprendre les questions précédentes.

   (c) On tire simultanément 6 boules de l'urne. On appelle résultat l'ensemble des six numéros obtenus.
      i. Quel est le nombre de résultats distincts ?
      ii. Combien de résultats amènent au moins une boule blanche ? 2 boules blanches et 4 boules noires ?

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Etant donné un nombre réel α, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = A$.

1. (a) Déterminer selon α le rang de f.
   (b) Expliciter, dans les différents cas, une base de l'image et une base du noyau de f.
   (c) Pour quelles valeurs de α l'image et le noyau de f sont-ils des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$?

Dans la suite, on suppose que α est différent de 0.
On pose $\epsilon_1 = \lambda e_1 + \alpha e_4$, où λ est un nombre réel, $\epsilon_2 = e_2$, $\epsilon_3 = e_3$ et $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. On pose également $F = \mathrm{Im}(f)$.

2. Déterminer λ pour que $\mathcal{B}$ soit une base de F. Dans la suite on supposera λ ainsi fixé.

Soit g la restriction de f à F.

3. Montrer que g est un endomorphisme de F et écrire la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$.
4. Montrer que g est inversible et écrire la matrice de g^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ vérifiant que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $h(\epsilon_i) = g^{-1}(\epsilon_i)$ et f et h ont le même noyau.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, u)$, où $u = (1, -1, -1, 0)$, est une base de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Montrer que h est bien défini et vérifier que la matrice H de h dans $\mathcal{B}'$ est $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{-1}{\alpha^2} & 0 \\ -1 & 1 & \dfrac{-1-\alpha}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) En utilisant la formule de changement de base, écrire la matrice D de h dans $\mathcal{C}$.
   (d) Déterminer le produit ADA.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des bijections de $[[1, n]]$. Un élément de S_n est appelé permutation.
Soit $\sigma \in S_n$. Un point fixe de σ est un entier $k \in [[1, n]]$ tel que $\sigma(k) = k$.
Pour $k \in [[0, n]]$, on pose $P_k = \{\sigma \in S_n,\ \sigma \text{ a exactement } k \text{ points fixes}\}$ et $D_{n,k} = \text{Card}(P_k)$. $D_{n,k}$ est donc le nombre de bijections de $[[1, n]]$ ayant k points fixes. Par convention on pose $D_{0,0} = 1$.
On appelle dérangement de $[[1, n]]$ une bijection de $[[1, n]]$ sans point fixe. On pose d_n le nombre de dérangements de $[[1, n]]$. On a donc $d_n = D_{n,0}$. Par convention on pose $d_0 = 1$.

1. Donner la liste des permutations de $\{1, 2, 3\}$. En déduire la valeur de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$.
3. Montrer que $D_{n,k} = \dbinom{n}{k} D_{n-k,0}$ et en déduire que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$. On notera cette relation (*).
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 1$ si $p = 0$ et 0 si $p > 0$.
5. En déduire que $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

   On utilisera que $n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$ et la relation $(*)$ pour $(n-k)!$.
6. Soit p_n la probabilité pour qu'une permutation prise au hasard soit un dérangement. Déterminer la limite de (p_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Soit $n \geq 1$. On note $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrons que $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$.
2. En déduire un équivalent de H_n.
3. On pose pour $n \geq 1$, $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Vérifier que pour $n \geq 2$, $v_n - v_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
4. Etudier la monotonie de (v_n). En déduire que (v_n) converge. On note γ sa limite. On pose pour $n \geq 1$, $w_n = H_n - \ln(n+1) - \gamma$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $|w_n - w_{n-1}| \leq \dfrac{1}{2n^2}$. On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.