DM15 pour le lundi 23 juin

Exercice 1

Une particule P se déplace sur une surface comportant quatre positions successives : A_0 (position 0) qui est un puits, A_1 (position 1) et A_2 (position 2) deux positions intermédiares et A_3, (position 3) un second puits. A l'instant $t = n$,

— si P est dans un puits, elle y reste avec une probabilité de 1.

— si P est en A_1, P va en A_0 avec la probabilité p, en A_2 avec la probabilité $1-p$.

— si P est en A_2, P va en A_1 avec la probabilité p, en A_3 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout $k \in [[0,3]]$, on note $B_{n,k}$ l'événement : "'la position de la particule P à $t = n$ est la position k"'.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(B_{n,0})$, $b_n = P(B_{n,1})$, $c_n = P(B_{n,2})$ et $d_n = P(B_{n,3})$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

On pose également $A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
2. On suppose dans la suite de l'exercice que $p = \dfrac{1}{2}$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\phi + \frac{1}{2}\mathrm{id})$, de $\mathrm{Ker}(\phi - \frac{1}{2}\mathrm{id})$ et de $\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{id})$.
3. Vérifier que la réunion $\mathcal{B}'$ de ces trois bases forme une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Ecrire directement la matrice D de ϕ dans $\mathcal{B}'$. Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. On suppose que la particule est initialement en position 2. Donner les coordonnées de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matries carrés d'ordre n à coefficients réels.

Une matrice T_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite tridiagonale symétrique si et seulement si T_n est de la forme :

$$T_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On désigne par $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices tridiagonales symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Première partie : quelques propriétés des matrices tridiagonales symétriques
   (a) Montrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera une base et la dimension.
   (b) Pour $n \geq 4$ on considère la famille :

$$T_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_2 \end{pmatrix},\ T_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix},\ T_4 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 \end{pmatrix},\ \cdots T_n.$$

   On note D_i le déterminant de T_i pour $i \in [[2; n]]$.
   Calculer D_n en fonction de D_{n-1}, D_{n-2}, a_n et b_{n-1}.
   (c) En déduire les déterminants des éléments des deux familles suivantes :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \cdots A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix},\ \cdots B_n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 4 & 10 & 4 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 4 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 4 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

2. Deuxième partie (facultative) : résolution d'un ssytème linéaire à matrice tridiagonale symétrique associée
   (a) Déterminer la matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ à coefficients positifs telle que $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & f & c & 0 \\ 0 & 0 & g & d \end{pmatrix}$ et $L.L^T = A_4$.
   (b) En utilisant la décomposition précédente de A_4, montrer que la résolution d'un système linéaire d'ordre 4 écrit sous la forme matricielle $A_4X = B$ (où X désigne la matrice unicolonne des quatre inconnes et B désigne la matrice unicolonne des quatre constantes du second membre) se ramène à la résolution successive de deux systèmes linéaires d'ordre 4 à matrices triangulaires associées.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}^4$, en appliquant uniquement la méthode précédente, le système linéaire suivant :

$$S = \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -9 \\ 2x_3 + 5x_4 = -1 \end{array} \right.$$