$\boxed{E2}$ FPT avec SCE $(U_1, U_2)$ de probas non nulles

$P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$

$P(B_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_1(1-p_1) + p_2^2 + (1-p_2)p_2\right) = P(U_1 \cap B_1 \cap B_2) + P(U_1 \cap \overline{B_1} \cap B_2) + P(U_2 \cap B_1 \cap B_2) + P(U_2 \cap \overline{B_1} \cap B_2)$

$= \frac{1}{2}\left(\cancel{p_1^2} + p_1 - \cancel{p_1^2} + \cancel{p_2^2} + p_2 - \cancel{p_2^2}\right) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$

$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$

$= P(U_1 \cap B_1 \cap B_2) + P(U_2 \cap B_1 \cap B_2)$

$= P(U_1) \times P_{U_1}(B_1) \times P_{U_1 \cap B_1}(B_2) + P(U_2) \times P_{U_2}(B_1) \times P_{U_2 \cap B_1}(B_2)$

$= \frac{1}{2} \times p_1 \times p_1 + \frac{1}{2} \times p_2 \times p_2$

$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2)$ ssi $\left(\frac{1}{2}\right)^2 (p_1 + p_2)^2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$

ssi $(p_1 + p_2)^2 = 2(p_1^2 + p_2^2)$

ssi $p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 = 2p_1^2 + 2p_2^2$

ssi $2p_1p_2 = p_1^2 + p_2^2$

ssi $(p_1 - p_2)^2 = 0$ ssi $p_1 = p_2$

Concl: $B_1$ et $B_2$ sont indépendants ssi $p_1 = p_2$

$\boxed{E3}$ Soit $n \geqslant 1$.

$\Omega$ = ensemble des $n$-listes d'éléments de $\{P, F\}$

$A_n = (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n) \cup (P_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap F_n) \cup \ldots \cup (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)$

$A_n = (F_1 \cap \ldots \cap F_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} (F_1 \cap \ldots P_i \cap \ldots \cap F_n)$

$P(A_n) = P(F_1 \cap \ldots \cap F_n) + \sum_{i=1}^{n} P(F_1 \cap \ldots \cap P_i \cap \ldots \cap F_n)$

$= \prod_{i=1}^{n} P(F_i) + \sum_{i=1}^{n} P(F_i)^{n-1}P(P_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

si $n \geqslant 2$, $P(B_n) = P(\overline{\text{aucun pile ou aucun face}})$

$= 1 - P(\text{aucun pile ou aucun face})$

$= 1 - [P(\text{aucun pile}) + P(\text{aucun face})]$

$= 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

$P(B_1) = 0$

$P(A_n \cap B_n) = P(\text{un pile exactement et au} \ominus \text{ une fois face})$

si $n = 1$ $P(A_n \cap B_n) = 0$

si $n \geqslant 2$ $P(A_n \cap B_n) = P(\text{un pile exactement}) = \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(A_n \cap B_n) = P(A_n)P(B_n)$ ssi ... ssi $n+1 = 2^{n-1}$

si $n = 3$, $n+1 = 4 = 2^{3-1}$ donc $A_n$ et $B_n$ indpdts

mq si $n \neq 3$, $n+1 \neq 2^{n-1}$. Pour ce faire, étudier la fonction $x \mapsto x+1-2^{x-1}$

E7

① $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < 2^n \leq n 2^n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$ CV donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$ CV et par le RCSTP, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ CV.

② Soit $k \geq 1$ $u_k = \frac{1}{k2^k}$ or $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1} dx = \left[\frac{x^k}{k}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}^k \times \frac{1}{k}$

Soit $n \geq 1$

donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^n}{1-x} dx$

lin de l'intégrale    car $x \neq 1$

donc $S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$

$= \left[-\ln|1-x|\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx = -\ln\frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$

$= \ln 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

Mq $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ CV vers 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-x} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{2x^n}{1-x}$

Par croissance de l'intégrale,

$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq 2\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$

par le th des gendarmes. Concl : $(S_n)$ CV vers $\ln 2$

$\sum u_n$ CV et la somme de la série vaut $\ln 2$

③ Soit B : "tirer une boule blanche dans l'urne"

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ ; on pose $A_k$ : "obtenir F au $k^e$ lancer"

$P(B) \overset{FPT}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P_{A_k}(B) P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ SCE de probas non nulles

En effet, à l'issue de k lancers de pièces dont (k-1) ont apporté 1 boule noire dans l'urne, il y a 1 boule blanche et k boules noires.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = 2\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j2^j}$

$= 2\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j2^j} - \frac{1}{1\times 2^1}\right) = 2\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j2^j} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(S_{n+1} - \frac{1}{2}\right)$

or $(S_n)$ CV vers $\ln 2$ donc $(S'_n)$ CV vers $2\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$

Donc $P(B) = 2\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

④
```
import random as rd
def expce():
    L = [0,1]
    while rd.randint(0,1) != 1:  # 1 pour une boule noire
        L.append[1]
    x = rd.randint(0, len(L)-1)
    return L[x]
```