Exercice

Soit $n \geq 2$. On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

Déterminer une relation de récurrence entre Δ_{n+1} et Δ_n en fonction de n.

Problème

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

$\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

I. Etude d'une symétrie

On notera bien que dans toute cette partie, $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}$-algèbre.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, on pose : $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$.

1.
   (a) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

   (b) Etablir que (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.

2. On considère A et B dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que : $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$.

   (b) Justifier l'égalité : $A\sigma(A) = \det(A)I$.

   (c) Montrer que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est aussi.

   Exprimer les matrices $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A.

3.
   (a) Vérifier que τ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

   (b) Soit A dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Exprimer $\sigma(A)$ à l'aide des matrices A, I et du complexe $\tau(A)$.

II. Une $\mathbb{R}$-algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions.

On notera bien , que dans toute cette partie, $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$-algèbre.

A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, on associe la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$.

On désigne par H l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(z_1, z_2)$, le couple (z_1, z_2) décrivant $\mathbb{C}^2$.

1.

   (a) Montrer que toute matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I+\beta J+\gamma K+\delta L$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.

   (b) En déduire que H est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

   Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel H.

   (c) Montrer que H est stable pour le produit matriciel.

   (d) Montrer que H est une $\mathbb{R}$-algèbre. La $\mathbb{R}$-algèbre H est-elle commutative ?

2.

   (a) Vérifier que : $\forall A \in H, \quad \sigma(A) \in H$ et $\det(A) \in \mathbb{R}_+$.

   (b) Montrer qu'une matrice non nulle de H est inversible et que son inverse est dans H.

   (c) Vérifier que $(H\backslash\{0\}, \times)$ est un groupe.

3. Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme la somme de quatre carrés d'entiers naturel alors il en est de même de leur produit.
   On pourra exprimer $\det(M(z_1, z_2))$ comme une somme de quatre carrés de réels.

III. Un produit scalaire et une projection orthogonale

Pour A et B dans H, on pose : $(A \mid B) = \dfrac{1}{4}\tau\left(A\sigma(B) + B\sigma(A)\right).$

1. On considère A et B dans H.

   (a) Prouver que $(A \mid B) \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser la question **I.3.b)**.

   (b) Montrer que $(A \mid A) = \det(A)$.

   (c) Etablir que $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H.

2. Vérifier que (I, J, K, L) est une base orthonormale de H.

3. On pose $F = \{A \in H \quad / \quad \tau(A) = 0\}$.

   (a) Montrer que F est un hyperplan du $\mathbb{R}$-espace vectoriel H. En donner une base.

   (b) Montrer que : $F^\perp = \{\alpha I, \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.

   (c) On désigne par π la projection orthogonale sur F.

   Montrer que : $\forall A \in H, \quad \pi(A) = \dfrac{1}{2}\left(A - \sigma(A)\right)$