↜ Corrigé du Baccalauréat Métropole 17 juin 2025 ↝

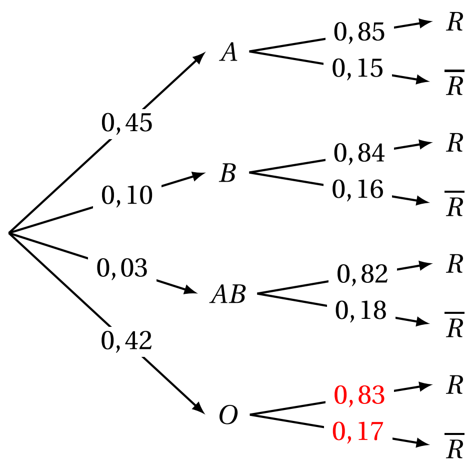
Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Exercice 1 — 5 points

Puisque l'on choisit une personne au hasard dans la population française, on est en situation d'équiprobabilité, et donc la loi uniforme permet d'assimiler les proportions à des probabilités.

1. L'arbre représentant la situation est :



   Remarque : les deux probabilités en rouge n'étaient pas attendues ici. On peut compléter ces deux branches après avoir répondu à la question **3.**

2. $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084$.

   Dans le contexte de l'exercice, 8,4% de la population est de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. Les évènements A, B, AB et O forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

   $P(R) = P\left(A \cap R\right) + P\left(B \cap R\right) + P\left(AB \cap R\right) + P\left(O \cap R\right)$

   D'où : $$\begin{aligned} P\left(O \cap R\right) &= P(R) - P\left(A \cap R\right) - P\left(B \cap R\right) - P\left(AB \cap R\right) \\ &= 0,8397 - 0,45 \times 0,85 - 0,084 - 0,03 \times 0,82 \\ &= 0,3486 \end{aligned}$$

   Or $P_O(R) = \dfrac{P(O \cap R)}{P(O)} = \dfrac{0,3486}{0,42} = 0,83$

   Ce qui est le résultat donné.

4. Trouver la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel revient à calculer la probabilité $P\left(O \cap \overline{R}\right)$.

$$\begin{aligned}P\left(O\cap\overline{R}\right) &= P(O)\times P_O\left(\overline{R}\right)\\ &= P(O)\times(1-P_O(R))\\ &= 0,42\times(1-0,83)\\ &= 0,0714\end{aligned}$$

La probabilité d'être un donneur universel est bien de 0,0714.

5. **a.** On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « la personne est un donneur universel » a une probabilité $p = 0,0714$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$.

b. $P(X \leq 7) \approx 0,57714$.

À 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon vaut $0,577$.

c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$ donc :

$$\begin{aligned}E(X) &= n\times p\\ &= 100\times 0,0714\\ &= 7,14\end{aligned}\qquad\qquad \begin{aligned}V(X) &= n\times p\times(1-p)\\ &= 100\times 0,0714\times(1-0,714)\\ &= 6,630204\\ &\approx 6,63 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}\end{aligned}$$

6. **a.** La variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice représente le nombre moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées.

b. M_N est la moyenne empirique de la variable aléatoire X donc :

$E(M_N) = E(X) = 7,14$.

c. $V(M_N) = \dfrac{V(X)}{N} = \dfrac{6,63}{N}$.

d. L'évènement $\{7 < M_N < 7,28\}$ revient à $\{|M_N - 7,14| < 0,14\}$

et $P\Big(|M_N - 7,14| < 0,14\Big) = 1 - P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big)$.

On veut que $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \geqslant 0,95$

On veut donc que $P\Big(|M_N - 7,14| < 0,14\Big) \leqslant 0,05$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\Big(|M_N - E(M_N)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V(M_N)}{t^2}$

Pour $t = 0,14$ on obtient : $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \leqslant \dfrac{6,63}{N\times 0,14^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{16575}{49N} \leqslant 0,05 \iff \dfrac{331500}{49} \leqslant N$

$\iff 6765 + \dfrac{15}{49} \leqslant N$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $N \geqslant 6766$.

La plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95$ est 6766.

Exercice 2 points

Partie A : Lectures graphiques

1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à C_f au point A(1 ; 2).

   La tangente T_A passe par le point C(3 ; 0) son coefficient directeur est donc égal à $\dfrac{0-2}{3-1} = \dfrac{-2}{2} = -1$.
   Donc $f'(1) = -1$.

2. $f'(x) = 0$ lorsque la tangente à la courbe est horizontale.

   L'équation $f'(x) = 0$ admet donc 2 solutions dans l'intervalle $]0\ ;\ 3]$ ce qui correspond à deux extremums de la fonction.

3. Graphiquement, sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,5]$ le graphe de la fonction semble concave donc on en déduit : $f''(0,2) < 0$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. $2X^2 - 3X + 2 = 0$ est une équation du second degré. Déterminons son discriminant Δ :

   $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$

   Le discriminant est négatif donc cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

   C_f coupe l'axe des abscisses à l'abscisse x est équivalent à $f(x) = 0$ soit

   $x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = 0$.

   Or $x > 0$ donc $f(x) = 0 \iff 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

   Posons pour $x > 0$, $X = \ln(x)$, l'équation devient : $2X^2 - 3X + 2 = 0$ or on vient de démontrer que cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc C_f ne coupe pas l'axe des abscisses

2. $f(x) = x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = x(\ln x)^2\left(2 - \dfrac{3}{\ln x} + \dfrac{2}{(\ln x)^2}\right)$.

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

   d'où, d'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$

   et, d'autre part $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\ln x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{(\ln x)^2} = 0 \end{cases}$ donc, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{3}{\ln(x)} + \dfrac{2}{(\ln(x))^2} = 2$.

   Et finalement, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. **a.** $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

   Non demandé : f est dérivable comme produit de sommes de fonctions de x dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 + x(4\ln x \times \dfrac{1}{x} - 3\dfrac{1}{x}) = 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 + 4\ln x - 3 = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

   On sait que u étant une fonction de x dérivable $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Donc pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$:

$f''(x) = 2\times 2\ln x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} - 0 = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.

b. Pour déterminer la convexité de f, déterminons le signe de $f''(x)$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$

$$\begin{aligned}4\ln x + 1 = 0 &\iff \ln x = -\frac{1}{4}\\ &\iff x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\\ 4\ln x + 1 > 0 &\iff \ln x > -\frac{1}{4}\\ &\iff x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Donc $f''(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.

D'où :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$		$+\infty$
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

La fonction f est concave sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right]$ et convexe sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$.

La valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion est $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

c. La fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$ or $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} < 1$

donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$

et donc sur cet intervalle, la courbe C_f est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_{B}.

Partie C : Calcul d'aire

1. L'équation réduite de la tangente T_{B} au point d'abscisse e est : $y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$

$f'(\mathrm{e}) = 2(\ln \mathrm{e})^2 + \ln \mathrm{e} - 1 = 2\times 1 + 1 - 1 = 2$;

$f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\left(2(\ln \mathrm{e})^2 - 3\ln e + 2\right) = \mathrm{e}\left(2\times 1^2 - 3 + 2\right) = \mathrm{e}\times 1 = \mathrm{e}$. (Ceci est dans l'énoncé mais pas clairement!)

La tangente T_{B} a donc pour équation réduite $y = 2x - \mathrm{e}$.

2. $x \longmapsto x\ln x$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \ln x & \text{et} \quad u'(x) = \frac{1}{x}\\ v'(x) = x & \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2}\end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues car dérivables sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$

$$\begin{aligned}
\text{d'où } \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x &= \left[\ln x \times \frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right]\,\mathrm{d}x\\
&= \left(\ln \mathrm{e} \times \frac{\mathrm{e}^2}{2}\right) - \left(\ln 1 \times \frac{1^2}{2}\right) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= 1\times\frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}}\\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right)\\
&= \frac{2\mathrm{e}^2}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4}\\
&= \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}
\end{aligned}$$

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_{B}, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_{B} donc l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_{B}, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale, en unité d'aires, à $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [f(x) - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} [f(x) - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x\\
&= \int_1^{\mathrm{e}} [2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 2x - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x - 3\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= 2\times\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} - 3\times\frac{\mathrm{e}^2+1}{4} + \left[\mathrm{e}x\right]_1^{\mathrm{e}} \qquad .\\
&= \frac{2\mathrm{e}^2 - 2 - 3\mathrm{e}^2 - 3}{4} + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\\
&= \frac{-\mathrm{e}^2 - 5}{4} + \frac{4\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}}{4}\\
&= \frac{3\mathrm{e}^2 - 5 - 4\mathrm{e}}{4}.
\end{aligned}$$

Soit une aire d'environ 1,57 unités d'aire.

La valeur exacte de $\mathscr{A}$ est $\dfrac{3\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e} - 5}{4}$ u.a.

Exercice 3 points

1. Affirmation 1 : Vraie.

La lecture de la représentation paramétrique donnée indique que la droite représentée :

- passe (pour le paramètre $t = 0$) par le point de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$, autrement dit par B ;

- et qu'elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

  Comme on a : $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-0\\-1-5\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$, on remarque que $\overrightarrow{\text{AB}} = -2\overrightarrow{u}$, donc la droite dont on a la représentation paramétrique est dirigée par un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{\text{AB}}$.

Ainsi, la représentation paramétrique donnée est celle d'une droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{\text{AB}}$: c'est bien la droite (AB).

Affirmation 2 : Fausse.

Comme O est l'origine du repère, on a $\overrightarrow{\text{OA}}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{OB}}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, et donc O, A et B définissent bien un plan. Le repère est orthonormal, donc on peut calculer des produits scalaires à l'aide des coordonnées :

On a bien : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{OA}} = 5\times(-1)+(-2)\times 0+1\times 5 = -5+0+5 = 0$ et $\overrightarrow{n}$ est donc bien orthogonal à $\overrightarrow{\text{OA}}$,

par contre, on a : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{OB}} = 5\times 3+(-2)\times 2+1\times(-1) = 15-4-1 = 10 \neq 0$ et $\overrightarrow{n}$ n'est donc pas orthogonal à $\overrightarrow{\text{OB}}$.

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal au plan (OAB), car il n'est pas orthogonal à deux vecteurs définissant une base de ce plan.

2. **Affirmation 3 : Fausse.**

   Par lecture des représentations paramétriques, les deux droites d et d' sont dirigées respectivement par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles (ni confondues, ni strictement parallèles). Elles peuvent donc être soit sécantes, soit non coplanaires.

   Cherchons s'il existe un coupe $(k\ ;\ s)$ tel que le point de paramètre k sur d soit confondu avec le point de paramètre s sur d', pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} 15+k=1+4s \\ 8-k=2+4s \\ -6+2k=1-6s \end{cases} \iff \begin{cases} k=-14+4s \\ 8-(-14+4s)=2+4s \\ -6+2(-14+4s)=1-6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k=-14+4s \\ 8+14-4s=2+4s \\ -6-28+8s=1-6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k=-14+4s \\ 8s=20 \\ 14s=35 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k=-14+4s \\ s=\frac{20}{8}=\frac{5}{2} \\ s=\frac{35}{14}=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s=2,5 \\ s=2,5 \\ k=-4 \end{cases}$$

Le système a une solution, donc les deux droites ont un point commun, le point qui a comme coordonnées $(11\ ;\ 12\ ;\ -14)$, c'est le point de paramètre $k=-4$ sur d et c'est aussi le point de paramètre $s=2,5$ sur d'.

Elles sont donc sécantes en ce point, et donc sont coplanaires.

3. **Affirmation 4 : Vraie.**

Le repère est orthonormé, donc par lecture de l'équation de plan, P admet comme vecteur normal $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées : $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la droite Δ, passant par C et orthogonale à P aura pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=2+l \\ y=-1-l \\ z=2+l \end{cases}$ avec $l \in \mathbb{R}$.

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur P, alors $\text{H} = P \cap \Delta$. Donc H sera le point de Δ dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de P.

On résout donc : $(2+l)-(-1-l)+(2+l)+1=0 \iff 3l+6=0$

$$\iff 3l=-6$$

$$\iff l=-2$$

H est donc le point de paramètre $l=-2$ sur Δ, donc ses coordonnées sont :

$\text{H}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

La distance CH vaut donc :
$$\begin{aligned}\text{CH} &= \sqrt{(0-2)^2+(1-(-1))^2+(0-2)^2}\\ &= \sqrt{4+4+4}\\ &= \sqrt{4\times 3}\\ &= \sqrt{4}\times\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

La distance entre C et P, c'est-à-dire la distance de C à son projeté orthogonal sur P est donc bien égale à $2\sqrt{3}$.

Exercice 4 points

Partie A : étude d'un modèle discret

1. Le premier juillet 2025 étant le premier juillet $2024+1$, on demande ici de calculer : $u_1 = u_{0+1} = -0,02u_0^2+1,3u_0 = -0,02\times 1^2+1,3\times 1 = 1,3-0,02 = 1,28$.

   D'après ce modèle, au premier juillet 2025, la posidonie recouvrera une superficie de 1,28 ha.

2. On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.

   Pour tout entier naturel n, on pose l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$. »

   Initialisation : pour $n=0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 1$ et d'après la question précédente $u_1 = 1,28$.

   On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.

   Hérédité : On suppose que, pour un entier naturel n, l'affirmation P_n est vraie.

   Par hypothèse, on a donc :

   $$\begin{aligned}1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20 &\implies h(1) \leqslant h(u_n) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(20)\\ &\qquad \text{car } h \text{ est supposée croissante sur } [0~;~20]\\ &\implies 1,28 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 18 \quad \text{car } h(1)=1,28 \text{ et } h(20)=18.\\ &\implies 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20 \quad \text{car } 1 \leqslant 1,28 \text{ et } 18 \leqslant 20.\end{aligned}$$

   Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est donc vraie aussi.

   Conclusion : On a établi que la propriété était vraie au rang 0, et que, pour n naturel n, P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc d'après le principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

3. D'après la question précédente, on a :

   - $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant 20$: la suite est bornée par 1 et 20;
   - $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite est croissante;

   La suite est donc croissante et majorée, elle est donc convergente, vers une limite L.

   Comme la suite est bornée par 1 et 20, on en déduit que la limite L est donc un réel de l'intervalle $[1~;~20]$.

4. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence étant continue (la fonction h est un polynôme de degré 2, donc continue sur son ensemble de définition) ; la suite est également convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite de la suite (u_n) doit être une solution à l'équation $h(x) = x$.

Résolvons cette équation :
$$\begin{aligned} h(x) = x &\iff -0,02x^2 + 1,3x = x \\ &\iff -0,02x^2 + 0,3x = 0 \\ &\iff -0,02x\left(x + \frac{0,3}{-0,02}\right) = 0 \\ &\iff -0,02x(x-15) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou bien } x = 15 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions, 0 et 15, et parmi ces deux solutions, seule 15 est dans l'intervalle $[1 ; 20]$, dont on a établi qu'il contient la limite L.

La limite de la suite est donc bien $L = 15$.

5. **a.** Puisque la suite converge vers 15, tout intervalle ouvert contenant 15 doit contenir tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

L'intervalle $]14 ; +\infty[$ est un tel intervalle, donc il existe un rang N_0 à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle $]14 ; +\infty[$, et sont donc supérieurs à 14.

Il existe donc une année à partir de laquelle la posidonie recouvrira une surface dépassant les 14 ha.

b. Il s'agit ici d'un algorithme de seuil classique, `n` et `u` sont initialisées à 0 et u_0 respectivement. Tant que le terme stocké dans la variable `u` restera inférieur ou égal à 14, alors on mettra à jour ces deux variables pour qu'elles contiennent respectivement l'indice suivant et le terme suivant dans la suite.

Cela donne :

```
def seuil():
  n=0
  u=1
  while u < = 14 :
    n= n+1
    u= -0.02*u**2 + 1.3*u
  return n
```

Remarque : Il y a une légère ambigüité sur l'interprétation de l'expression « dépassera les 14 hectares ». On a choisi dans ce corrigé de le comprendre comme « devenant strictement supérieur à 14 hectares ».

Si on interprète comme « devenant supérieur ou égal à 14 hectares », alors la quatrième ligne de l'algorithme devient : `while u < 14 :` Les deux versions renvoient le même résultat, de toutes façons, car aucun terme de la suite n'est égal à 14.

L'appel `seuil()` renvoie ici 18, car $u_{17} \approx 13,8$ et $u_{18} \approx 14,1$. Il faudra donc 18 ans pour que la posidonie recouvre une surface dépassant les 14 hectares.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. Si on a, pour tout réel positif t, $g = \dfrac{1}{f(t)}$, alors pour tout réel t positif, on a :

$g'(t) = \dfrac{-f'(t)}{f(t)^2}$

On aura alors : $\begin{aligned}[t] -0,3g(t)+0,02 &= \dfrac{-0,3}{f(t)}+0,02 \\ &= \dfrac{-0,3+0,02f(t)}{f(t)} \end{aligned}$

Et, par ailleurs : $\begin{aligned}[t] g'(t) &= \dfrac{-f'(t)}{f(t)^2} \\ &= \dfrac{-\left[0,02f(t)(15-f(t))\right]}{f(t)^2} \quad \text{car } f \text{ est solution de } (E_1) \\ &= \dfrac{-\left[0,02(15-f(t))\right]}{f(t)} \quad \text{en simplifiant par } f(t) \end{aligned}$

on rappelle que f ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$

$\begin{aligned}[t] &= \dfrac{-0,3+f(t)}{f(t)} \quad \text{en développant} \\ &= -0,3g(t)+0,02 \end{aligned}$

On constate bien que g est une solution de l'équation différentielle (E_2).

2. Les solutions de l'équation (E_2) sont, d'après une propriété du cours, les fonctions de la forme : $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,3t}+\dfrac{-0,02}{-0,3}$, où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire, les fonctions de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,3t}+\dfrac{1}{15}$, où $C \in \mathbb{R}$.

3. Comme on sait que $f(0) = 1$, on en déduit $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = 1$.

Donc $\begin{aligned}[t] g(0) = 1 &\iff C\mathrm{e}^{-0,3\times 0}+\dfrac{1}{15} = 1 \\ &\iff C+\dfrac{1}{15} = 1 \\ &\iff C = 1-\dfrac{1}{15} \\ &\iff C = \dfrac{14}{15} \end{aligned}$

La seule fonction solution de (E_2) vérifiant $g(0) = 1$ est donc
$g : t \longmapsto \dfrac{14}{15}\mathrm{e}^{-0,3t}+\dfrac{1}{15}$.

On en déduit donc que, pour tout t réel positif, on a : $\begin{aligned}[t] f(t) &= \dfrac{1}{g(t)} \\ &= \dfrac{1}{\dfrac{14}{15}\mathrm{e}^{-0,3t}+\dfrac{1}{15}} \\ &= \dfrac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1} \end{aligned}$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. On a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,3t = -\infty$, donc par composition, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,3t} = \lim_{y\to-\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$

Par limite du produit et de la somme, on a alors : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 14\mathrm{e}^{-0,3t}+1 = 1$.

Finalement, par limite du quotient : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1} = 15.$

La fonction f tend vers 15 quand t tend vers $+\infty$. Le modèle continu rejoint la conclusion du modèle discret : la posidonie tendra à occuper une surface de 15 hectares.

5. Soit t un réel positif. Résolvons :

$$\begin{aligned}
f(t) > 14 &\iff \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t}+1} > 14\\
&\iff 15 > 14(14\mathrm{e}^{-0,3t}+1) \quad \text{car } 14\mathrm{e}^{-0,3t}+1>0\\
&\iff 15 > 196\mathrm{e}^{-0,3t}+14\\
&\iff 1 > 196\mathrm{e}^{-0,3t}\\
&\iff \frac{1}{196} > \mathrm{e}^{-0,3t} \quad \text{car } 196>0\\
&\iff \ln\left(\frac{1}{196}\right) > -0,3t \quad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+\\
&\iff -\ln(196) > -0,3t \quad \text{par proriété de la fonction ln}\\
&\iff \frac{\ln(196)}{0,3} < t \quad \text{car } -0,3<0
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $\left]\dfrac{\ln(196)}{0,3}\ ;\ +\infty\right[$.

Comme $\dfrac{\ln(196)}{0,3} \approx 17,6$, cela signifie qu'il faudra environ 17,6 années (soit 17 ans et un peu plus de 7 mois) pour que la posidonie occupe un espace strictement supérieur à 14 hectares. Là encore, le modèle continu a des conclusions cohérentes avec celles du modèle discret.