DM14 cor MPSI 24-25

Exercice 1 :

① $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ réalise une bijection donc $\mathbb{R}$ et $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sont équipotents

② $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ réalise une bijection. En effet,

soit $p \in \mathbb{Z}$. • Si $p \geq 0$ alors $\exists!\, n \in \mathbb{N}$ tq $f(n)=p$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n)=p$ ssi $\frac{n}{2}=p$ ssi $n=2p$

• Si $p<0$ alors $\exists!\, n \in \mathbb{N}$ tq $f(n)=p$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n)=p$ ssi $-\left(\frac{n+1}{2}\right)=p$ ssi $n=-2p-1$

$\mathbb{Z}$ est équipotent à $\mathbb{N}$ donc <u>$\mathbb{Z}$ est dénombrable</u>

③ $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ tq $\varphi(n,p)=2^n(2p+1)$

<u>Montrons que φ est injective.</u>

Soit (n,p) et (n',p') deux éléments de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tels que $\varphi(n,p)=\varphi(n',p')$

Alors $2^n(2p+1)=2^{n'}(2p'+1)$

Donc $(2p'+1) \mid 2^n(2p+1)$ or $2p'+1$ et 2^n sont premiers entre eux car l'un est pair et l'autre est impair donc par le lemme de Gauss, $(2p'+1)\mid(2p+1)$

De même on montre que $(2p+1)\mid(2p'+1)$ donc $2p+1=2p'+1$ donc $p=p'$ or $2^n(2p+1)=2^{n'}(2p'+1)$ donc $2^n=2^{n'}$ donc $n=n'$.

Ainsi $\varphi(n,p)=\varphi(n',p')$ et φ est injective.

De plus $\forall (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\varphi(n,p)\in\mathbb{N}^*$ donc $\varphi(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^*$

Donc φ est <u>surjective</u> de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans une partie de $\mathbb{N}^*$.

(Soit $E=\varphi(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ alors $E\subset\mathbb{N}^*$ et $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to E$ est surjective par définition de $\varphi(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$).

Concl : φ est <u>bijective</u> de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans une partie de $\mathbb{N}^*$ et <u>$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable</u> ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ étant équipotent à un sous-ensemble de $\mathbb{N}$).

(4) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ tq $\varphi(a_1, \dots, a_k) = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$

où $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts

Montrons que φ est injective

Soient $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$, $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{N}^k$ tq $\varphi(a_1, \dots, a_k) = \varphi(b_1, \dots, b_k)$

On a alors $p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_k^{b_k}$

or par le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers, cette décomposition de tout entier naturel est unique donc $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$ donc $(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k)$ et φ est injective.

De plus $\varphi(\mathbb{N}^k) \subset \mathbb{N}$ donc φ est surjective de $\mathbb{N}^k$ dans une partie de $\mathbb{N}$ donc φ est bijective de $\mathbb{N}^k$ dans une partie de $\mathbb{N}$ (qui est égale à $\varphi(\mathbb{N}^k)$) et donc $\mathbb{N}^k$ est dénombrable ($\mathbb{N}^k$ étant équipotent à un sous-ensemble de $\mathbb{N}$).

(5) Soient $A_1, \dots, A_k$ des ensembles dénombrables

Montrons que $A_1 \times \dots \times A_k$ est dénombrable

Comme pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, A_i est dénombrable, il existe une bijection $\varphi_i : A_i \to \varphi(A_i)$ où $\varphi(A_i) \subset \mathbb{N}$

Soit $\varphi : A_1 \times \dots \times A_k \to \mathbb{N}^k$

$$(a_1, \dots, a_k) \longmapsto (\varphi_1(a_1), \dots, \varphi_k(a_k))$$

Comme $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\varphi_i : A_i \to \varphi(A_i)$ est bijective,

φ est bijective de $A_1 \times \dots \times A_k$ vers $\varphi(A_1) \times \dots \varphi(A_k) \subset \mathbb{N}^k$

Or $\mathbb{N}^k$ est dénombrable donc toute partie de $\mathbb{N}^k$ est dénombrable

Donc $A_1 \times \dots \times A_k$ est dénombrable

(6) (a) $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ est surjective par définition de $\mathbb{Q}$

$$(p, q) = \frac{p}{q}$$

mais φ n'est pas injective car $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ par exemple, alors que $(2, 3) \neq (4, 6)$.

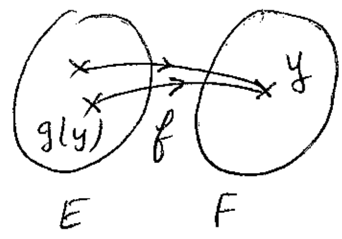
(b) Soit $f : E \to F$ surjective avec E dénombrable.

Comme f est surjective, $\forall y \in F$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

Pour tout $y \in F$, on choisit un antécédent de y par f que l'on note $g(y)$.

On pose $X = \{g(y), y \in F\}$. $X \subset E$.

On définit ainsi une application $g : F \to X$



Si $y \in F$, $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$

donc $f \circ g(y) = f(g(y)) = y$

donc $f \circ g = id_F$

donc en particulier $f \circ g$ est injective

Mq g est injective :

Soit $(y, y') \in F^2$ tq $g(y) = g(y')$ alors $f \circ g(y) = f \circ g(y')$ donc $y = y'$

Donc $g : F \to X$ est injective

et comme $X = g(F)$, $g : F \to X$ est surjective

Donc $g : F \to X$ est bijective

or $X \subset E$ et E est dénombrable

Donc F est dénombrable.

ⓒ $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ est surjective et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable

d'après q5 puisque $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables

Donc d'après q 6b $\mathbb{Q}$ est dénombrable

Exercice 2

① ⓐ $n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$ ssi $n! = K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$

(u_n) converge vers $l\in\mathbb{R}$ ssi $\exists l \in \mathbb{R}$ tq $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n!) - n\ln(n) + n - \frac{1}{2}\ln(n) = l$

ssi $\exists l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!}{n^n\sqrt{n}}\right) + n\ln e = l$

ssi $\exists l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}}\right) = l$

ssi $\exists l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} = e^l$

ssi $\exists l$, $\frac{n!\,e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim e^l$

ssi $\exists l$, $n! \sim e^l\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$

ssi $\exists K$, $n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$

ⓑ Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$u_{n+1} - u_n = \ln((n+1)!) - (n+1)\ln(n+1) + \cancel{n}+1 - \frac{1}{2}\ln(n+1)$
$- \ln n! + n\ln n - \cancel{n} + \frac{1}{2}\ln n$

$= \ln\cancel{(n+1)} + \cancel{\ln(n!)} - n\ln(n+1) - \ln\cancel{(n+1)} + 1 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
$- \cancel{\ln n!} + n\ln n$

$= -n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= \left(-n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 1$

$= \left(-n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1$

$= \left(-n-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 1$

$= -1 + \cancel{\frac{n}{2n^2}} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1$

$= -1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1$

$= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{2n^2}\right)$

Donc $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ or $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ CV (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) donc $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{2n^2}$ aussi et donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_{n+1} - u_n$ CV par le th d'équivalence positive.

(c) Comme $\sum_{n\geq 1} u_{n+1}-u_n$ CV, (u_n) converge (résultat sur les séries telescopiques)

donc par (1)(a), $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tq $\underline{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$.

(2) Comme $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

$I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n}\, I_{2n} = \sqrt{\pi}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\, I_{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$

or $\sqrt{2n}\, I_{2n} = \sqrt{2n} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \overset{q\,1c}{\longrightarrow} = \sqrt{2n} \times \frac{K\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{(2^n)^2 \times (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

$= 2n \frac{K\,(2n)^{2n}}{e^{2n}\, 2^{2n}\left(K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right)^2} \times \frac{\pi}{2}$

$= \cancel{2n} \frac{K\,\cancel{(n)^{2n}}\,\cancel{2^{2n}} \times \cancel{e^{2n}}}{\cancel{e^{2n}}\,\cancel{2^{2n}}\,K^2\,\cancel{n^{2n}} \times \cancel{n}} \times \frac{\pi}{2} = \pi \frac{K}{K^2} = \frac{\pi}{K}$

Par unicité de la limite de la suite $(\sqrt{2n}\, I_{2n})$, on obtient que $\frac{\pi}{K} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ d'où $K = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{2} = \sqrt{\pi} \times \sqrt{2}$

Donc $\underline{K = \sqrt{2\pi}}$

Exercice 3 Soit $z \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$

① la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

donc $e^{|z|} = \sum_{k=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!} + \int_0^{|z|} \frac{(|z|-t)^N}{N!} e^t \, dt$

par la formule de Taylor reste intégral entre 0 et $|z|$.

② On pose $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!}$

$S_{N+1} - S_N = \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!} \geq 0$ donc $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante

D'après le ①, comme $\int_0^{|z|} \frac{(|z|-t)^N}{N!} e^t \, dt \geq 0$, puisque

$t \mapsto \frac{(|z|-t)^N}{N!} e^t$ est positive sur $[0, |z|]$ par positivité

de l'intégrale, on a donc $e^{|z|} - \sum_{k=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!} \geq 0$

donc $e^{|z|} \geq S_N \quad \forall N \in \mathbb{N}$

Donc $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée par $e^{|z|}$

③ (S_N) converge donc par le théorème de la limite monotone.

Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{|z|^n}{n!}$ est une série convergente

Donc $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument, donc elle converge.

On en déduit que le terme général de cette série

converge vers 0 donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{|z|^n}{n!} = 0$, c'est-à-dire que

la suite $\left(\frac{|z|^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ converge vers 0

Approfondissement : on peut mq la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$

est égale à e^z en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : t \mapsto e^{tz}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leq M \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$

où M est indépendant de n. Et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

d'après ③ on obtient que $\lim_{n \to +\infty} e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 0$