c.à.d $A_{i,n} = B_{n,i}$

(1) Si, pour tout $i \in [\![0,3]\!]$, $A_{i,n}$ est l'événement : « être en position i à l'instant n », alors, en appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $A_{0,n+1}$ avec le système complet d'événements $(A_{i,n})_{i\in[\![0,3]\!]}$, $P(A_{0,n+1})$ vaut :

$$\begin{array}{l} P_{A_{0,n}}(A_{0,n+1})P(A_{0,n}) + P_{A_{1,n}}(A_{0,n+1})P(A_{1,n}) \\ +P_{A_{2,n}}(A_{0,n+1})P(A_{2,n}) + P_{A_{3,n}}(A_{0,n+1})P(A_{3,n}) \end{array}.$$

Si l'on pose :

$$\begin{array}{l} a_n = P(x_n = 0) = P(A_{0,n}),\ b_n = P(x_n = 1) = P(A_{1,n}) \\ c_n = P(x_n = 2) = P(A_{2,n}),\ d_n = P(x_n = 3) = P(A_{3,n}) \end{array},$$

on a : $a_{n+1} = a_n \times 1 + b_n \times p + c_n \times 0 + d_n \times 0$.
De la même façon, on a : $b_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times p + d_n \times 0$.
Puis, on a : $c_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times q + c_n \times 0 + d_n \times 0$.
Et, enfin : $d_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times q + d_n \times 1$.
Utilisons maintenant les notations de l'énoncé, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} P(x_n=0) \\ P(x_n=1) \\ P(x_n=2) \\ P(x_n=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} P(x_{n+1}=0) \\ P(x_{n+1}=1) \\ P(x_{n+1}=2) \\ P(x_{n+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix},$$

On a finalement : $X_{n+1} = AX_n$.

(2) Soit ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

• Déterminons une base de Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$.
Le vecteur $\vec{u}(x,y,z,t)$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient au sous-espace vectoriel Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = -\frac{1}{2}\vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/2 \\ -y/2 \\ -z/2 \\ -t/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 1/2y & = & -1/2x \\ 1/2z & = & -1/2y \\ 1/2y & = & -1/2z \\ 1/2z + t & = & -1/2t \end{array} \right.,$$

ce qui donne finalement : $3x = -y$, $z = -y$, $y = -z$ et $z = -3t$.
Et on en déduit que $(x,y,z,t) \in$ Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si (x,y,z,t) est de la forme $(x,-3x,3x,-x) = x(1,-3,3,-1)$. La famille $\{\vec{u}_1(1,-3,3,-1)\}$ est donc génératrice de Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$ et est libre car son unique vecteur est non nul. Donc :

$$\boxed{\text{Ker } \left(\phi + \tfrac{1}{2}Id\right) \text{ a pour base } \{\vec{u}_1(1,-3,3,-1)\}.}$$

• Déterminons une base de Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$.
Le vecteur $\vec{u}(x,y,z,t)$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient au sous-espace vectoriel Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 1/2y & = & 1/2x \\ 1/2z & = & 1/2y \\ 1/2y & = & 1/2z \\ 1/2z + t & = & 1/2t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & y \\ y & = & z \\ z & = & -t \end{array} \right..$$

On en déduit que $(x,y,z,t) \in$ Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si (x,y,z,t) est de la forme $(x,-x,-x,x) = x(1,-1,-1,1)$. La famille $\{\vec{u}_2(1,-1,-1,1)\}$ est donc génératrice de Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ et est libre car son unique vecteur est non nul. Donc :

$$\boxed{\text{Ker } \left(\phi - \tfrac{1}{2}Id\right) \text{ a pour base } \{\vec{u}_2(1,-1,-1,1)\}.}$$

- Déterminons une base de Ker $(\phi - Id)$.

Le vecteur $\vec{u}(x,y,z,t)$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient à Ker $(\phi - Id)$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = \vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 1/2y & = & x \\ 1/2z & = & y \\ 1/2y & = & z \\ 1/2z + t & = & t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ t & = & t \end{array} \right. .$$

On en déduit que $(x,y,z,t) \in$ Ker $(\phi - Id)$ si et seulement si (x,y,z,t) est de la forme $(x,0,0,t) = x(1,0,0,0) + t(0,0,0,1)$. La famille $\{\vec{e}_1(1,0,0,0),\ \vec{e}_4(0,0,0,1)\}$ est donc génératrice de Ker $(\phi - Id)$ et est clairement libre car les deux vecteurs qui la composent sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donc :

$$\boxed{\text{Ker } (\phi - Id) \text{ a pour base } \{\vec{e}_1(1,0,0,0),\ \vec{e}_4(0,0,0,1)\}.}$$

3 Vérifions que la réunion $\mathcal{B}'$ de ces trois bases forme une base de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1(1,-3,3,-1),\ \vec{u}_2(1,-1,-1,1),\ \vec{e}_1(1,0,0,0),\ \vec{e}_4(0,0,0,1)\}.$$

On a plusieurs méthodes possibles.

Si vous venez de MPSI, PCSI ou PTSI (option PSI), vous avez vu les déterminants d'ordre 4 et il suffit de prouver que le déterminant de la famille $\mathcal{B}'$ est non nul.

Si vous venez de 1TSI ou de 1TPC (mais ce n'est pas interdit de faire aussi comme cela si vous ne venez pas de ces deux filières), vous pouvez montrer que la matrice associée à la famille $\mathcal{B}'$ est de rang 4. Vous pouvez aussi montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. C'est ce que nous choisissons de faire car il faut bien faire quelque chose et essayer d'être commun à toutes les filières. On doit montrer l'implication :

$$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_4 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

C'est-à-dire : $\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ -3\alpha - \beta & = & 0 \\ 3\alpha - \beta & = & 0 \\ -\alpha + \beta + \delta & = & 0 \end{array} \right.$

On remarque que la deuxième et la troisième lignes fournissent $\alpha = \beta = 0$. Puis la première ligne donne $\gamma = 0$ et la quatrième donne $\delta = 0$. On a bien le résultat voulu.

$$\boxed{\{\vec{u}_1(1,-3,3,-1),\ \vec{u}_2(1,-1,-1,1),\ \vec{e}_1(1,0,0,0),\ \vec{e}_4(0,0,0,1)\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

4 Écrivons alors la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}'$.

Comme $\phi(\vec{u}_1) = -\frac{1}{2}\vec{u}_1$, $\phi(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\vec{u}_2$, $\phi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $\phi(\vec{e}_4) = \vec{e}_4$, on a immédiatement les quatre colonnes de la matrice $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

5 Calculons A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On sait que (en posant $D = M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$),

$$M_{\mathcal{B}'}(\phi) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'-1} M_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}.$$

On en déduit que $D^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$. La formule est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$. (Le fait qu'elle soit vraie pour $n = 2$ n'est pas obligatoire pour l'initialisation mais cela permet de deviner le développement que l'on va faire pour l'hérédité.) Supposons que la formule soit vraie pour n fixé supérieur ou égal à 2.

On a alors : $D^{n+1} = D^nD = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^{n+1}P$.

On a fini la récurrence. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}.$$

Posons $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On reconnaît la matrice de la famille $\mathcal{B}'$. On calcule l'inverse de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ soit en inversant un système, soit en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan. Faisons cet algorithme. On « concatène » $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et I_4 et on va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ en I_4 et I_4 en $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'-1}$. On part donc de :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On effectue pour commencer les opérations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue les opérations élémentaires :

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue l'opération élémentaire : $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$.

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue l'opération élémentaire : $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$.

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue les opérations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$.

Il reste à effectuer les opérations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow L_1 - L_2.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$.

On aboutit à : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n 2^{-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^n 2^{-n} & 2^{-n} & 1 & 0 \\ -3(-1)^n 2^{-n} & -2^{-n} & 0 & 0 \\ 3(-1)^n 2^{-n} & -2^{-n} & 0 & 0 \\ -(-1)^n 2^{-n} & 2^{-n} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2/3-2^{-n}/2-(-2)^{-n}/6 & 1/3-2^{-n}/2+(-2)^{-n}/6 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2+(-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2-(-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2-(-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2+(-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 1/3-2^{-n}/2+(-2)^{-n}/6 & 2/3-2^{-n}/2-(-2)^{-n}/6 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Remarque

Si l'on applique pour $n=0$, on retrouve I_4 et pour $n=1$, on retrouve A.

Nous allons maintenant en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$.

6 On pose : $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = A^n X_0$.

$$A^nX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3-2^{-n}/2-(-2)^{-n}/6 & 1/3-2^{-n}/2+(-2)^{-n}/6 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2+(-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2-(-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2-(-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2+(-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 1/3-2^{-n}/2+(-2)^{-n}/6 & 2/3-2^{-n}/2-(-2)^{-n}/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$$

On remarque que lorsque n tend vers $+\infty$, 2^{-n} et $(-2)^{-n}$ tendent vers 0. Et il reste :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{pmatrix} a_0+\frac{2}{3}b_0+\frac{1}{3}c_0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}b_0+\frac{2}{3}c_0+d_0 \end{pmatrix}.}$$

Si $c_0=1$, $a_0=b_0=d_0=0$, la particule est initialement certainement en position 2. Et $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$. Rappelons nous maintenant $g(N,2)$ et de la liste trouvée pour $N=120$.

Compléments : quelques fonctions en python utiles pour simuler l'expérience
on pose x_n la position de la particule à $t=n$.

```
from scipy.stats import *
def Position(x,p) : # donne x_{n+1} en fonction de x_n
  va = binom(1,p); X = va.rvs(size=1)
  if x == 0 :
     return 0
  elif x == 1 :
     if X[0] = 1 :
        return(0)
     else :
        return(2)
  elif x == 2 :
     if X[0] = 1 :
        return(1)
     else :
        return(3)
  else :
     return(3)
def Pos(n,p,x0) : # renvoie x_n en fonction de p et de n et de x_0 (position initiale)
  u = x0
  for i in range(n) :
     u = Position(u,p)
  return(u)
```

```
def g(N,x0) # donne la fréquence de chaque position au bout de N déplacements
  L = [Pos(n,0.5,x0) for n in range(0,N)]
  return [L.count(i)/len(L) for i in range(0,4)]
```

```
import numpy as np
def PuissanceN(A,N) : # renvoie A^N où N ∈ ℕ
  AN = A
  for n in range(1,N) :
     AN = np.dot(A,AN)
  return AN
```

Exercice 2

Première partie - Quelques propriétés des matrices tridiagonales symétriques

1) a) La famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désignant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a par définition :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) &= \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k E_{k,k} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k\big(E_{k,k+1}+E_{k+1,k}\big)\right\}\\ &= Vect\Big(E_{1,1},\dots,E_{n,n},E_{1,2}+E_{2,1},\dots,E_{n,n-1}+E_{n-1,n}\Big).\end{aligned}$$

Cette famille était libre de manière évidente au vu de la position des zéros, on en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ de dimension } 2n-1\\ \text{dont une base est : } \Big(E_{1,1},\dots,E_{n,n},E_{1,2}+E_{2,1},\dots,E_{n,n-1}+E_{n-1,n}\Big).\end{array}}$$

b) En développant le déterminant par rapport à la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = a_n\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & 0\\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} & \\ 0 & & & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2}\\ & & & & b_{n-2} & a_{n-1}\end{vmatrix}_{[n-1]} - b_{n-1}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & 0\\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3} & \\ 0 & & & b_{n-3} & a_{n-2} & \\ & & & & b_{n-2} & b_{n-1}\end{vmatrix}_{[n-1]}.$$

Le premier déterminant n'est autre que D_{n-1} et, dans le second, en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$D_n = a_nD_{n-1} - b_{n-1}\times b_{n-1}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & 0\\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & b_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-3} & b_{n-3}\\ 0 & & & b_{n-3} & a_{n-2}\end{vmatrix}_{[n-2]}$$

et donc :

$$\boxed{D_n = a_nD_{n-1} - (b_{n-1})^2D_{n-2}.}$$

c) Pour la famille (A), on a donc :

$$D_2 = 5-4 = 1 \quad \text{et} \quad D_3 = 5D_2 - 2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} = 5-2(2-0) = 1,$$

et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 4,\quad D_n = 5D_{n-1} - 4D_{n-2}.$$

L'équation caractéristique correspondant à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est :

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \quad \text{soit :} \quad (r-1)(r-4) = 0.$$

Donc, il existe deux constantes λ et μ telles que :

$$\forall n \geqslant 2,\quad D_n = \lambda + \mu\, 4^n.$$

En particulier pour $n=2$ et $n=3$ on obtient : $1 = \lambda + 16\mu$ et $1 = \lambda + 64\mu$, d'où on tire : $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\quad \det(A_n) = 1.}$$

De même pour la famille (B), on a :

$$D_2 = -6 \quad \text{et} \quad D_3 = 10D_2 - 4\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix} = -76$$

et la relation de récurrence : $\forall n \geqslant 2,\ D_n = 10D_{n-1} - 16D_{n-2}$ a pour équation caractéristique : $r^2 - 10r + 16 = 0$ dont les solutions sont 2 et 8. Ainsi, il existe deux constantes λ et μ telles que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad D_n = \lambda\, 2^n + \mu\, 8^n.$$

En particulier pour $n = 2$ et $n = 3$ on obtient : $-6 = 4\lambda + 64\mu$ et $-76 = 8\lambda + 512\mu$, d'où on tire : $\lambda = \frac{7}{6}$ et $\mu = -\frac{1}{6}$. On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad \det(B_n) = \frac{7 \cdot 2^n - 8^n}{6}.}$$

2 **Deuxième partie** - Résolution d'un système linéaire à matrice tridiagonale symétrique associée

a. Le calcul donne :

$$L \cdot {}^tL = \begin{pmatrix} a^2 & ae & 0 & 0 \\ ae & e^2 + b^2 & bf & 0 \\ 0 & bf & f^2 + c^2 & cg \\ 0 & 0 & cg & g^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

On résout dans $(R_+)^7$:

$$L \cdot {}^tL = A_4 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 1 \\ ae & = & 2 \\ e^2 + b^2 & = & 5 \\ bf & = & 2 \\ f^2 + c^2 & = & 5 \\ cg & = & 2 \\ g^2 + d^2 & = & 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ e = 2 \\ b = 1 \\ f = 2 \\ c = 1 \\ g = 2 \\ d = 1 \end{array} \right.,$$

et donc :

$$\boxed{L \cdot {}^tL = A_4 \Leftrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

b. On a les équivalences :

$$A_4 X = B \Leftrightarrow (L \cdot {}^tL)X = B \Leftrightarrow L({}^tLX) = B.$$

On est donc ramené à résoudre d'abord le système, d'inconnue Y : $LY = B$, associé à la matrice triangulaire inférieure L d'ordre 4, puis le système ${}^tLX = Y$ associé à la matrice triangulaire supérieure ${}^tL$ d'ordre 4. Ainsi

$$\boxed{\text{on se ramène à la résolution successive de deux systèmes linéaires triangulaires.}}$$

c. Avec les notations précédentes, ce système s'écrit :

$$A_4 X = B \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On résout donc d'abord :

$$LY = B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & 5 \\ 2y_1 + y_2 & = & 6 \\ 2y_2 + y_3 & = & -9 \\ 2y_3 + y_4 & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} y_1 & = & 5 \\ y_2 & = & -4 \\ y_3 & = & -1 \\ y_4 & = & 1 \end{array} \right..$$

Et on résout ensuite :

$${}^tLX = Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 5 \\ x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ x_3 + 2x_4 & = & -1 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & -3 \\ x_4 & = & 1 \end{array} \right..$$

$$\boxed{\text{La solution du système est le quadruplet : } (1, 2, -3, 1).}$$