# Exercice 0 : intervalles

Compléter le tableau suivant :

| $x$ | $-x$ | $\pi+x$ | $\pi-x$ | $\frac{\pi}{2}-x$ | $\frac{\pi}{2}+x$ | $\frac{\pi}{3}-2x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ | | | | | | |
| | | | | $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ | | |
| | | | | | | $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ |

Par exemple pour la première ligne, on suppose que le nombre $x$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. On demande à quel intervalle appartiennent respectivement les angles $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$, etc...

# Exercice 1 : fonction cotangente

On appelle cotangente et on note cot la fonction qui à un nombre réel $\theta$ associe le nombre réel

$$\cot(\theta)=\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

1. Déteminer l'ensemble de définition de la fonction cot.
2. Préciser les valeurs prises par cot en $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.
3. Exprimer $\cot(\theta+2\pi)$, $\cot(-\theta)$, $\cot(\theta+\pi)$, $\cot(\pi-\theta)$, $\cot(\theta+\frac{\pi}{2})$ et $\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)$ en fonction de $\cot(\theta)$.
4. Que pouvez-vous en déduire sur la périodicité et la parité de la fonction cotangente ?
5. Montrer que la fonction cotangente est continue et dérivable sur son domaine de définition et déterminer sa dérivée et son tableau de variation.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction cot.
7. Facultatif : indiquer sur le cercle trigonométrique comment on peut lire $\cot(\theta)$.

# Exercice 2 : autour de formules trigonométriques

1. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
   Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin(nx)=\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

   On précise que le membre de gauche de l'égalité possède $n$ termes.
2. Simplifier $\frac{\cos(p)-\cos(q)}{\sin(p)+\sin(q)}$ où $p$ et $q$ sont des réels tels que $\sin(p)+\sin(q)\neq 0$. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$. On pourra pour cela choisir des valeurs adéquates pour $p$ et $q$.