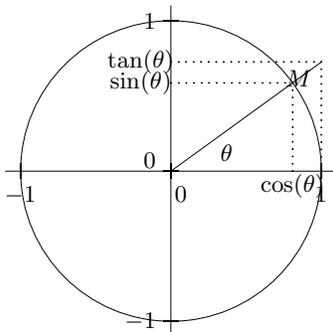


Chapitre 0 : Trigonométrie

1 Cercle trigonométrique



Le cercle trigonométrique, dans un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, est le cercle \mathcal{C} de centre O (origine du repère) et de rayon 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et M le point de \mathcal{C} tel que θ soit une mesure de l'angle orienté (\vec{i}, \vec{OM}) . On note alors $\cos(\theta)$ l'abscisse de M et $\sin(\theta)$ son ordonnée.

De plus, si $\theta \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, alors on pose

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Remarque 1. L'ensemble $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ est noté $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Propriété 1.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Valeurs remarquables à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0

Propriété 2.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$ et $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$ et $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ et $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Démonstration : à $x + 2\pi$ correspond le même point qu'à x ; à $x + \pi$ le symétrique par rapport à 0 ; à $-x$ le symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; à $\pi - x$ celui par rapport à l'axe des ordonnées ; à $x + \frac{\pi}{2}$ l'image par une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, enfin à $\frac{\pi}{2} - x$ l'image par la symétrie axiale par rapport à la première bissectrice.

Propriété 3.

On a :

- ▶ \cos est définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et paire.
- ▶ \sin est définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et impaire.
- ▶ \tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, est π -périodique et est impaire.

2 Formules trigonométriques

Commençons par la plus célèbre et ses dérivées :

Propriété 4.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- ▶ $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- ▶ Si $x \notin \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, alors $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Les formules suivantes sont toutes à connaître parfaitement. On apprendra plus tard à les retrouver à l'aide des exponentielles complexes.

Propriété 5 (Formules d'addition).

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

- ▶ $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- ▶ $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ et $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- ▶ Si a, b et $a + b$ ne sont pas des éléments de l'ensemble $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, on a $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

- ▶ Exemple : Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Propriété 6 (Formules dites de l'angle double ou de duplication).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- ▶ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- ▶ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- ▶ Lorsque x et $2x$ ne sont pas des éléments de l'ensemble $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

Remarque 2. Ce ne sont que des cas particuliers des formules d'addition vues au-dessus. Pour obtenir $\cos(3a)$, on applique la formule de duplication à a et à $2a$. On peut donc calculer les valeurs de $\cos(na)$ et $\sin(na)$ de proche en proche de cette façon.

On déduit de la propriété précédente :

Propriété 7.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- ▶ $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- ▶ $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Propriété 8 (Corollaire).

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Posons $t = \tan(\frac{x}{2})$. Alors

$$\blacktriangleright \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\blacktriangleright \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\blacktriangleright \text{Si } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \text{ alors } \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Remarque 3. Ces expressions de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$ en fonction de $\tan\frac{\theta}{2}$ seront souvent utiles (en particulier pour aborder les calculs d'intégrales trigonométriques), il faut donc les mémoriser dès maintenant, en remarquant leurs particularités propres (parité, ...).

Propriété 9 (Transformations de produits en sommes).

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\blacktriangleright \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\blacktriangleright \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\blacktriangleright \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\blacktriangleright \sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

d'où

Propriété 10 (Transformations de sommes en produits).

Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$:

$$\blacktriangleright \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacktriangleright \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacktriangleright \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacktriangleright \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

3 Equations et inéquations trigonométriques**Propriété 11.**

Les équations trigonométriques les plus simples se résolvent de la façon suivante :

$$\blacktriangleright \cos x = \cos a \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi] \text{ ou } x \equiv -a[2\pi]$$

$$\blacktriangleright \sin x = \sin a \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - a[2\pi]$$

$$\blacktriangleright \tan x = \tan a \Leftrightarrow x \equiv a[\pi]$$

Les équations et inéquations plus complexes se déduisent de celles-ci.

$$\blacktriangleright \text{Exemple : Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation } \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\blacktriangleright \text{Exemple : Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation } \sin 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\blacktriangleright \text{Exemple : Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'inéquation } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4 Etude des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont aussi appelées fonctions circulaires.

Lemme 1 (Admis). *On a*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Remarque 4. *On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.*

Propriété 12.

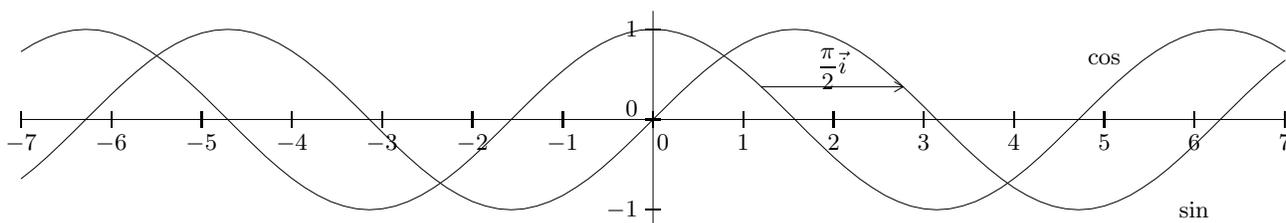
La fonction $x \mapsto \cos x$ est définie sur \mathbb{R} , paire et 2π -périodique. Elle est continue et dérivable *sur* \mathbb{R} et $\cos' = -\sin$. On a le tableau de variations suivant sur $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-1	0	1	0	-1

Propriété 13.

La fonction $x \mapsto \sin x$ est définie sur \mathbb{R} , impaire et 2π -périodique. Elle est continue et dérivable *sur* \mathbb{R} et $\sin' = \cos$. On a le tableau de variations suivant sur $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	1	0



Remarque 5. *Le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ explique le fait que la courbe de sin soit la translatée de la courbe de cos par le vecteur $\frac{\pi}{2} \vec{i}$ (sinus est en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur cosinus).*

Propriété 14.

La fonction $x \mapsto \tan x$ est définie sur chacun des intervalles de la forme $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; elle est impaire et π -périodique. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. On a le tableau de variations suivant sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$

