

Deux prop 23 Soit $a \in E$

- ② f est dérivable en a donc $\text{Re}f$ et $\text{Im}f$ sont dér en a
 g est dérivable en a donc $\text{Re}g$ et $\text{Im}g$ sont dér en a .

$$\forall a \in E \quad (fg)(a) = (\text{Re}f + i \text{Im}f)(a) \times (\text{Re}g + i \text{Im}g)(a)$$

$$\forall a \in E \quad (fg)(a) = [\text{Re}f(a) \text{Re}g(a) - \text{Im}f(a) \text{Im}g(a)] + i [\text{Re}f(a) \text{Im}g(a) + \text{Im}f(a) \text{Re}g(a)]$$

Ainsi $fg = [\text{Re}f \text{Re}g - \text{Im}f \text{Im}g] + i [\text{Re}f \text{Im}g + \text{Im}f \text{Re}g]$
 or $\text{Re}f \text{Re}g - \text{Im}f \text{Im}g$ est dér en a comme somme et produit de fct's dér en a

et $\text{Re}f \text{Im}g + \text{Im}f \text{Re}g$
 donc $\text{Re}(fg)$ et $\text{Im}(fg)$ sont dér en a
 donc fg est dér en a .

et pour tout $a \in E$,

$$(\text{Re}(fg))'(a) = (\text{Re}f)' \text{Re}g + \text{Re}f (\text{Re}g)' - (\text{Im}f)' \text{Im}g - \text{Im}f (\text{Im}g)'$$

$$(\text{Im}(fg))'(a) = (\text{Re}f)' \text{Im}g + \text{Re}f (\text{Im}g)' + (\text{Im}f)' \text{Re}g + \text{Im}f (\text{Re}g)'$$

$$\begin{aligned} \text{or } (f'g + fg')(a) &= ((\text{Re}f' + i \text{Im}f')(\text{Re}g + i \text{Im}g) + (\text{Re}f + i \text{Im}f)(\text{Re}g' + i \text{Im}g'))(a) \\ &= (\text{Re}f' \text{Re}g - \text{Im}f' \text{Im}g) + i (\text{Re}f' \text{Im}g + \text{Im}f' \text{Re}g) + (\text{Re}f \text{Re}g' - \text{Im}f \text{Im}g') + i (\text{Re}f \text{Im}g' + \text{Im}f \text{Re}g') \\ &= \underbrace{[\text{Re}f' \text{Re}g - \text{Im}f' \text{Im}g + \text{Re}f \text{Re}g' - \text{Im}f \text{Im}g']}_{\text{Re}(f'g + fg')} + i \underbrace{[\text{Re}f' \text{Im}g + \text{Im}f' \text{Re}g + \text{Re}f \text{Im}g' + \text{Im}f \text{Re}g']}_{\text{Im}(f'g + fg')} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } (\text{Re}(fg))'(a) = \text{Re}(f'g + fg')(a) \text{ et } (\text{Im}(fg))'(a) = \text{Im}(f'g + fg')(a)$$

$$\text{Donc } (fg)'(a) = [\text{Re}(f'g + fg') + i \text{Im}(f'g + fg')](a) = (f'g + fg')(a).$$

- ③ $\frac{f}{g} = f \times \bar{g} \times \frac{1}{g\bar{g}}$ est le produit de 3 fonctions dér en a

en effet f est dér en a , g est dér en a donc $\text{Re}g$ et $\text{Im}g$ sont dér en a
 et donc $\text{Re}g - i \text{Im}g$ est dér en a , c'à d $\bar{g}$ est dér en a .
 donc $\text{Re}g$ et $-\text{Im}g$ sont dér en a

De plus $g\bar{g} = (\text{Re}g)^2 + (\text{Im}g)^2$ est dér en a en tant que produit et somme de fonctions dér en a et $g\bar{g}$ ne s'annule pas en a car $g(a) \neq 0 \Rightarrow \bar{g}(a) \neq 0$
 donc $\frac{1}{g\bar{g}}$ est dér en a en tant que inverse d'une fonction réelle dérivable en a qui ne s'annule pas en a .

Conclusion : $\frac{f}{g}$ est dér en a .

Posons $h = \frac{f}{g}$. Alors $f = gh$ et comme f , g et h sont dér en a , on a : $f'(a) = g'(a)h(a) + g(a)h'(a)$ d'après prop 23 ②

$$\text{Ainsi, comme } g(a) \neq 0, \quad g(a)h'(a) = f'(a) - g'(a)h(a)$$

$$\text{et } h'(a) = \frac{f'(a) - g'(a)h(a)}{g(a)}$$

$$\text{c'à d } h'(a) = \frac{g(a)}{g(a)} \frac{[f'(a) - g'(a)h(a)]}{g(a)}$$

$$h'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)h(a)g(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)\frac{f(a)}{g(a)}g(a)}{g^2(a)}$$

$$h'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$$

Méthode bien plus rapide que celle vue en classe (et bcp moins calculatoire)
A travailler