

Exemple 4

Soit $m \in \mathbb{R}$ - la matrice augmentée associée au système est:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & m \\ 0 & m+1 & -2 & 1-m \\ 0 & 0 & -2 & 1-m \end{array} \right)$$

Dijonction de cas:

- si $m+1=0$ alors les 2 dernières lignes sont égales; $m+1=0$ ssi $m=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

le système initial est équivalent à $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ -2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = -1 + y - z \\ z = -1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = -1 + y + 1 \\ z = -1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = y \\ z = -1 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

le système a une infinité de solutions

$$\mathcal{Y} = \left\{ (y, y, -1), y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ssi } \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1t + 0 \\ y = 1t + 0 \\ z = 0t - 1 \end{cases}$$

$\mathcal{Y}$ est la droite qui passe par $A(0,0,-1)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}(1,1,0)$

- si $m+1 \neq 0$ alors le système a 3 pivots et une unique solution

$$\text{le système est équivalent à } \begin{cases} x - y + z = m \\ (m+1)y - 2z = 1-m \\ -2z = 1-m \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = m + y - z = m + 0 - \frac{m-1}{2} \\ y = \frac{1-m+2z}{m+1} = \frac{1-m+m-1}{m+1} = 0 \\ z = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} x = \frac{m+1}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{Y} = \left\{ \left(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2} \right) \right\}$$