

Exercices sur la densité - MPSI. Commencez par l'exercice 1, puis 2, 3 et 4.

Exercice 4:

Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{n+1} - u_n)$ CV vers 0 et (u_n) DV vers $+\infty$. Soit (v_n) une suite réelle qui DV vers $+\infty$.

On fixe deux réels a et b tels que $a < b$.

Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$

- 1) Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que $w_0 \leq a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |w_{n+1} - w_n| \leq \frac{b-a}{2}$
- 2) On suppose que l'on fait ce choix de p et de q . Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $w_N \leq a$ et $w_{N+1} > a$
- 3) En déduire que l'ensemble $B = \{u_n - v_s \mid (n, s) \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3:

Montrer que $\{m - \ln(m) \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 2:

on pose $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^*\}$. On veut montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$

- 1) Montrer le lemme suivant:

Soit $X \subset \mathbb{R}$ tel que a) $\forall a \in X, \forall m \in \mathbb{N}, m \cdot a \in X$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists s \in X$ tq $0 < s < \varepsilon$

Alors X est dense dans $\mathbb{R}^+$

Et si en plus X est stable par $-$ alors X est dense dans $\mathbb{R}$

- 2) Appliquer ce lemme à A pour montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 1:

1) Montrer que $A = \{\frac{m}{n^3}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

2) Montrer que $B = \{\ln r, r \in \mathbb{Q}_+^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 con

1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

$$\text{tq } x \leq \frac{p}{q} \leq y.$$

$$\text{or } \frac{p}{q} = \frac{p \times q^2}{q^3}$$

on a donc trouvé $m = pq^2 \in \mathbb{Z}$ et $n = q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \leq \frac{m}{n^3} \leq y.$$

Concl: A est dense dans $\mathbb{R}$

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On a alors $0 < e^x < e^y$.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on sait qu'il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$

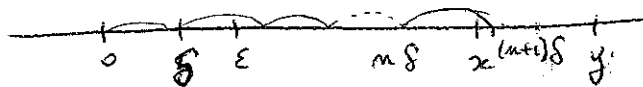
$$\text{tel que } e^x \leq r \leq e^y$$

On a alors $\ln(e^x) \leq \ln(r) \leq \ln(e^y)$, puisque $\ln$ est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Donc } x \leq \ln r \leq y$$

Concl: B est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 cor



1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$ tq $x < y$

Montrons qu'il existe $a \in X$ tq $a \in [x, y]$

On prend $\varepsilon = y - x > 0$. D'après b) il existe $\delta \in X$ tq $0 < \delta < y - x$.

Posons $n = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor$ alors $n \leq \frac{x}{\delta} < n+1$.

$$\text{càd } n\delta \leq x < (n+1)\delta.$$

Puisque $(n+1) \in \mathbb{N}$ et $\delta \in X$ on a d'après a) : $(n+1)\delta \in X$

Reste à montrer que $(n+1)\delta \leq y$

D'une part $n\delta \leq x$ et d'autre part $\delta < y - x$

donc $(n+1)\delta = n\delta + \delta < x + y - x$ donc $(n+1)\delta < y$

Conclusion : on a trouvé $a \in X$ tq $a \in [x, y]$ ($a = (n+1)\delta$).
donc X est dense dans $\mathbb{R}^+$

On suppose maintenant que X est stable par $-$. Mq X est dense dans $\mathbb{R}$.

On sait déjà par ce qui précède que X est dense dans $\mathbb{R}^+$.

On montre que X est dense dans $\mathbb{R}^-$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{-2}$ tq $x < y$

Alors $(-x, -y) \in \mathbb{R}^{+2}$ et $-x > -y$

On peut alors affirmer d'après ce qui précède qu'il existe $a \in X$

tel que $a \in [-y, -x]$. Comme X est stable par $-$, $-a \in X$

et $-a \in [x, y]$ donc on a trouvé un élément de X dans $[x, y]$.

Ainsi X est dense dans $\mathbb{R}^+$ et dans $\mathbb{R}^-$.

Montrons que X est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x < 0 < y$. Comme X est dense dans $\mathbb{R}^+$,

Alors il existe $a \in X$ tel que $a \in [x, 0]$. Or $[x, 0] \subset [x, y]$

donc il existe $a \in X$ tel que $a \in [x, y]$

Concl : X est dense dans $\mathbb{R}$.

2) D'une part, par définition $A \subset \mathbb{R}$

D'autre part, soit $a \in A$ et $m \in \mathbb{N}^*$, mq $m.a \in A$.

$a \in A$ donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tq $a = \sqrt{m} - \sqrt{p}$

$m.a = m(\sqrt{m} - \sqrt{p}) = m\sqrt{m} - m\sqrt{p} = \sqrt{m^2 m} - \sqrt{m^2 p}$ car $m = |m| = \sqrt{m^2}$

or $m^2 m \in \mathbb{N}^*$ et $m^2 p \in \mathbb{N}^*$ donc $m.a \in A$.

Finalement $0.a = 0 = \sqrt{2} - \sqrt{2}$ donc $0 \in A$.

Ainsi $\forall a \in A, \forall m \in \mathbb{N}, m.a \in A$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Donc $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \rightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ càd $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Ainsi par ex $\sqrt{n_0+1} - \sqrt{n_0} < \varepsilon$ et $\sqrt{n_0+1} - \sqrt{n_0} \in A$

A est stable par $-$ car si $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in A$ alors $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in A$

Concl : A est dense dans $\mathbb{R}$.