Semaine du 05/01

Chapitre 11 : Suites numériques

Limite d'une suite réelle
Limite finie ou infinie d'une suite. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produit, quotient. Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$). Utilisation d'une majoration de la forme $|u_n - \ell| \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.

Théorèmes d'existence d'une limite
Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergences par minoration ou majoration. Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.

Suites extraites
Suite extraite. Si une suite possède une limite, teoutes ses suites extraites possèdent la même limite. Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ alors (u_n) converge vers ℓ. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Traduction séquentielle de certaines propriétés
Partie dense de $\mathbb{R}$. Densité de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Caractérisation séquentielle de la densité. Si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$. Si X est une partie non vide non majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $+\infty$. Résultats analogues pour X non vide minorée.

Suites complexes
Brève extension des définitions et résultats précédents. Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Suites particulières
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.

Question de cours avec démonstration :

— $\diamond$ Si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$. (propriété 33 item 1).

— Soit u telle que $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, avec $b \neq 0$. Si l'équation du second degré $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ (th5).

— $\diamond$ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe.
u converge dans $\mathbb{C}$ ssi $\mathrm{Re}u$ et $\mathrm{Im}u$ convergent dans $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$ (P36).

Chapitre 12 : Structures algébriques usuelles

Loi de composition interne
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles. Partie stable.

Structure de groupe
Groupe. Exemples usuels de groupes additifs et multiplicatifs. Groupe des permutations d'un ensemble X (notation S_X). Groupe produit. Sous-groupe : définition, caractérisation. Morphisme de groupes. Vocabulaire : isomorphisme, endomorphisme, automorphisme. Image directe et réciproque d'un sous-groupe par un morphisme.

Structure d'anneau
Anneau. Exemples usuels : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Calcul dans un anneau. Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent. Groupe des inversibles d'un anneau. Anneau intègre. Corps. Sous-anneau.

Question de cours avec démonstration :

— Si $(A, +, \times)$ est un anneau intègre alors pour tout $(a, b) \in A^2$ on a $ab = 0_A \Rightarrow a = 0_A$ ou $b = 0_A$ (P10).

— Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soit I l'ensemble des éléments inversibles de A. $(I, \times)$ est un groupe (P12).

— $\diamond$ Soit f un morphisme de groupes de $(G, *)$ sur (G', ∇). Si e est l'élément neutre de $(G, *)$ et e' l'élément neutre de (G', ∇),
on a $f(e) = e'$ (un morphisme de groupes transporte l'élément neutre) et $\forall x \in G, \quad f\left(x^{-1}\right) = (f(x))^{-1}$ (un morphisme de groupes transporte la notion de symétrique) (propriété 13 items 1 et 2).

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Le reste de la colle sera coupé en quatre : chaque élève aura à

— étudier un cas de suites adjacentes,

— décider si un ensemble muni d'une loi est un groupe (à l'aide de la définition ou à l'aide de la caractérisation d'un sous-groupe d'un groupe donné/usuel)

— montrer qu'un ensemble donné muni de deux lois est un sous-anneau d'un anneau de référence

— montrer qu'une application donnée est un endo/iso/auto-morphisme de groupes

S'il reste du temps les exercices porteront sur les suites (étude d'une suite complexe, exercices plus théoriques), sur les lois de compositions internes, sur le groupe symétrique, sur les structures d'anneaux, sous-anneaux, corps, ou sur les calculs dans un anneau.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative

à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal
◇ El Hadi Mohammed Rayane
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël
◇ Lorimier Wyatt
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Habib Salma

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël
Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 Hallot Elouan
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès
◇ Huyard Maëlys
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopin Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide