Semaine du 26/01

Chapitre 14 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans Z, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples d'entiers associés. Théorème de la division euclidienne.

PGCD et algorithme d'Euclide PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Algorithme d'Euclide. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}$, PGCD de ka et kb. Extension au cas de deux entiers relatifs. Relation de Bézout. Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu. PPCM. Notation $a \vee b$.

Entiers premiers entre eux Couple d'entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout. Forme irréductible d'un rationnel. Lemme de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n , alors ab divise n. Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n. PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. En- tiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

Nombres premiers Nombre premier. Crible d'Eratosthène. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers. Pour p premier, valuation p-adique. Valuation p-adique d'un produit. Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.

Congruences Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b[n]$. Opérations sur les congruences : somme, produit. Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme. Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n. Petit théorème de Fermat

Question de cours avec démonstration :

— Soient a, b et c trois entiers relatifs. Si $a \wedge b = 1$ et si $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge bc = 1$ (propr 8.1). Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n (propr 8.3).

— $\diamond$ Caractérisation de la valuation et valuation d'un produit (prop 15 et 16).

— $\diamond$ Petit théorème de Fermat (théorème 4)

Chapitre 15 : Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires. Principe de démonstration par dichotomie. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone. Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réci- proque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.

Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité aux fonctions à valeurs complexes.

Continuité uniforme. Exemple des fonctions lipschitziennes. Théorème de Heine.

Question de cours avec démonstration :
- Théorème des valeurs intermédiaires (théorème 1 : l'élève définira les deux suites puis indiquera clairement le plan de démonstration ; le colleur pourra demander de détailler un ou deux passages de la démonstration)
- $\diamond$ Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I est uniformément continue sur I (P11)
- Théorème de Heine (théorème 3)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à utiliser un inverse modulo n pour résoudre une équation exprimée sous la forme d'une congruence modulo n et à déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue (par exemple si $f : x \mapsto 1 - 2\cos x$, déterminer $f([-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}])$ ou $f(]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}])$ ...).
Les exercices porteront ensuite sur les nombres premiers (décomposition en facteurs premiers, valuation), les congruences, les équations diophantiennes, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des bornes atteintes, la fonction réciproque d'une fonction strictement monotone continue sur un intervalle. Les équations fonctionnelles n'ont pas encore été travaillées ...

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal
$\diamond$ El Hadi Mohammed Rayane
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël
$\diamond$ Lorimier Wyatt
$\diamond$ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
$\diamond$ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Habib Salma

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 $\diamond$ Minart Nathanaël
Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan
Prudhomme Esteban
◇ Jemal Youssef

G12 ◇ Petit Inès
Huyard Maëlys

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopin Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide