Semaine du 02/02

Chapitre 15 : Continuité sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires. Principe de démonstration par dichotomie. Image d'un intervalle par une fonction continue. Corollaire : cas d'une fonction continue strictement monotone. Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Image d'un segment par une fonction continue. Une fonction continue sur un intervalle, à valeurs réelles et injective, est strictement monotone. Toute fonction réelle strictement monotone, définie et continue sur un intervalle, admet une fonction réci- proque de même monotonie, définie et continue sur un intervalle.
Brève extension des définitions et résultats généraux sur les limites et la continuité aux fonctions à valeurs complexes.
Continuité uniforme. Exemple des fonctions lipschitziennes. Théorème de Heine.

Question de cours avec démonstration :

1. $\diamond$ Soit $a > 0$. La fonction carrée est uniformément continue sur $[0, a]$ et n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ (ex au dessus du th3).
2. $\diamond$ exercice type : trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x)f(y)$ (voir ex 7 td15). .

Chapitre 16 : Matrices

Ensembles de matrices Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Opérations sur les matrices : addition, multiplication par un scalaire, combinaison linéaire, produit matriciel (bilinéarité, associativité). Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Matrices élémentaires. Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires. Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$. Transposée d'une matrice. Notation A^T. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Systèmes linéaires Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé. Système compatible. Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A. Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X0 + Y$, où $X0$ est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé. On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

Interprétation matricielle des opérations élémentaires Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices de transvection, de permutation et de dilatation. Inversibilité de ces matrices. Traduction matricielle de l'algrithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice rectangulaire A à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$. Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Anneau des matrice carrées Anneau $M_n(\mathbb{K})$. Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents. Matrice identité, matrice scalaire. Notation I_n . Matrices symétriques, antisymétriques. Notations $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$. Formule du binôme. Application au calcul

de puissances. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires.
Matrices carrées inversibles Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire. Notation $GL_n(\mathbb{K})$. Inverse d'une transposée. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$. Toute technicité est exclue. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire. Cas particulier des matrices diagonales.

Question de cours avec démonstration :

1. associativité du produit matriciel (propr2)
2. $\diamond$ transposée d'un produit (propr9)
3. produit de deux matrices triangulaires supérieures (propr 13)
4. A est inversible ssi $\forall B,\ AX = B$ admet une unique solution (propr 25 items 1 ssi 4)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra

1. interpréter matriciellement sur un exemple concret d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une opération élémentaire sur les lignes en terme de produit matriciel,
2. déterminer rapidement l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3 par la méthode du pivot de Gauss ou par la méthode de résolution d'un système,
3. expliquer rapidement pourquoi une matrice A carrée d'ordre 3 n'est pas inversible (méthode 3 du cours) en déterminant $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AX = 0_{3,1}$,
4. résoudre une équation fonctionnelle du type $f(x + y) = f(x)f(y)$ (celle-ci a été traitée en td) ou $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (celle-là a été traitée en DM).

Les exercices porteront ensuite sur la recherche de puissances de matrices, sur les matrices carrées particulières (symétriques, triangulaires,...), sur l'inversibilité, sur des exercices plus théoriques sur le cacul matriciel, sur la continuité sur un intervalle (uniforme continuité, fonction à valeurs complexes...).

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal
◇ El Hadi Mohammed Rayane
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël
◇ Lorimier Wyatt
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël
Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès
Habib Salma
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopin Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide