Soit $P=(a_i)\in\mathcal{F}$
$Q=(b_i)\in\mathcal{F}$
$R=(c_i)\in\mathcal{F}$

On note $P\times Q=(d_i)\in\mathcal{F}$
$(P\times Q)\times R=(e_i)\in\mathcal{F}$
$Q\times R=(f_i)\in\mathcal{F}$
$P\times(Q\times R)=(g_i)\in\mathcal{F}$

Soit $i\in\mathbb{N}$. Mq $e_i=g_i$

<u>D'une part</u> $e_i=\sum_{j=0}^{i} d_j c_{i-j}=\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} c_{i-j}$

Cette forme de ei ne sera pas gardée ensuite.

<u>D'autre part</u> $g_i=\sum_{j=0}^{i} a_j f_{i-j}$

$$=\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}\underbrace{f_j}=\left(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}\underbrace{\sum_{l=0}^{j} b_l c_{j-l}}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}\underbrace{\sum_{l=0}^{j} b_{j-l} c_l}$$ ← prendre cette forme plutôt que celle-ci

$$=\sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} a_{i-j} b_{j-l} c_l$$

on intervertit les 2 signes sommes

$$=\sum_{0\le l\le j\le i} a_{i-j} b_{j-l} c_l$$

$$=\sum_{l=0}^{i}\sum_{j=l}^{i} a_{i-j} b_{j-l} c_l$$

$k=j-l$ $$=\sum_{l=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-l} a_{i-k-l} b_k c_l$$

$j=l$ $$=\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-j} a_{i-k-j} b_k c_j$$

<u>Par ailleurs,</u> $e_i=\sum_{j=0}^{i} d_j c_{i-j}=\sum_{j=0}^{i} c_j d_{i-j}=\left(\sum_{j=0}^{i} c_j\sum_{k=0}^{i-j} a_k b_{i-j-k}\right)$

$e_i=\sum_{j=0}^{i} c_j\sum_{k=0}^{i-j} a_{i-j-k} b_k=\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{i-j} a_{i-k-j} b_k c_j$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall i\in\mathbb{N},\ e_i=g_i}$