Semaine du 02/03

Chapitre 17 : Dérivation : en exercices

Dérivée en un point, fonction dérivée : dérivabilité en un point, nombre dérivé. Définition par le taux d'accroissement. Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. La dérivabilité entraine la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Interprétation cinématique de la notion de dérivabilité en un point. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle, fonction dérivée. Opération sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques. Tangente au graphe d'une réciproque.

Extremum local et point critique Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur. Un point critique est un zéro de la dérivée. **Théorème de Rolle et des accroissements finis** Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis. Interprétation graphique et cinématique de ces résultats. Inégalités des accroissements finis : : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne. Application au suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continue sur I et si $f'(x)$ tend vers l (réel ou infini) lorsque x tend vers a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers l lorsque x tend vers a. Interprétation géométrique. Si l est un nombre réel alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ensemble $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Opérations : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz, quotient, composition, réciproque.

Fonctions complexes Brève extension aux fonctions à valeurs complexes : inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, caractérisation des fonctions constantes, de la dérivaibilité en termes de partie réelle et imaginaire. Interprétation cinématique. Le théorème de Rolle ne s'étend pas.

Chapitre 18 : Polynômes

Anneau des polynômes à une indéterminée Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Degré d'une somme, d'un produit. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre. Composition.
Divisibilité et division euclidienne Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne. Algorithme de la division euclidienne.
Fonctions polynomiale et racines Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section Nombres complexes. Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Détermination d'un polynôme par la fonction polyno- miale associée. Multiplicité d'une racine.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète : les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement).
Dérivation Dérivée formelle d'un polynôme. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction

polyno- miale associée. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité dune racine par les polynômes dérivés successifs.

Démonstrations :

1. Si $P = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des polynômes formels sur $\mathbb{K}$ alors $P \times Q = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \cdots, a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0, \cdots)$ $= (p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où $p_i = \displaystyle\sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}$ est un polynôme formel et $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ (propriété 3)
2. Théorème de la division euclidienne (théorème 1 : unicité)
3. Formule de Taylor (théorème 2)
4. $\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre k de P, alors α est racine d'ordre $k-1$ de P' (propr 17)
5. $\diamond$ Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs (propr 18).
6. $\diamond$ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient a et b deux réels distincts, avec $a \neq b$. Soient α et β les restes respectifs de la division de P par $(X-a)$ et par $(X-b)$. Quel est le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$? (sous th4)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours (par exemple une ou deux dérivées usuelles) et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura rapidement à poser une division euclidienne de polynômes, à décider si un polynome donné est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$ et à donner la définition d'une fonction symétrique élémentaire des racines d'un polynôme scindé P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ dans un cas simple ($n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ ou $n = 5$) ainsi que son expression en fonction des cofficients de P. Les exercices porteront ensuite sur la recherche du degré et du coefficient dominant d'un polynôme, sur le lien entre coefficients et racines (résolution de systèmes), sur la divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, sur la multiplicité des racines, sur la dérivation des polynômes, sur la dérivation de fonctions à valeurs complexes, ou plus largement sur le chapitre dérivation.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal
◇ El Hadi Mohammed Rayane
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël
◇ Lorimier Wyatt
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël
Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès
Habib Salma
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopin Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide