

Semaine du 09/03

## Chapitre 18 : Polynômes

**Anneau des polynômes à une indéterminée** Anneau  $\mathbb{K}[X]$ . Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de degré au plus  $n$ . Degré d'une somme, d'un produit. L'anneau  $\mathbb{K}[X]$  est intègre. Composition.

**Divisibilité et division euclidienne** Divisibilité dans  $\mathbb{K}[X]$ , diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne. Algorithme de la division euclidienne.

**Fonctions polynomiale et racines** Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section Nombres complexes. Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète : les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement).

**Dérivation** Dérivée formelle d'un polynôme. Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

**Arithmétique dans  $\mathbb{K}[X]$**  PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Tout diviseur commun à  $A$  et  $B$  de degré maximal est appelé un PGCD de  $A$  et  $B$ . Algorithme d'Euclide. L'ensemble des diviseurs communs à  $A$  et  $B$  est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de  $A$  et  $B$  sont associés. Un seul est unitaire, on le note  $A \wedge B$ . Relation de Bézout. Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu. PPCM. Notation  $A \vee B$ . Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans  $\mathbb{Z}$ . PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.

**Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$**  Théorème de d'Alembert-Gauss. La démonstration est hors programme. Polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ . Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ . Caractérisation de la divisibilité dans  $\mathbb{C}[X]$  à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de  $X^n - 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ . Polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ . Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ . Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  ont même ordre de multiplicité.

**Fractions rationnelles** Corps  $\mathbb{K}(X)$ . La construction de  $\mathbb{K}(X)$  est hors programme. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

**Décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$**  Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ . La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Si  $\lambda$  est un pôle simple, coefficient de  $\frac{1}{X - \lambda}$ .

Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$ .

Démonstrations :

1. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  (propriété 24 et encadré qui précède ; la démonstration est écrite avant l'encadré, elle est coupée par la propriété 23)
2.  $\diamond$  Deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune (propr 31)
3. si  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux alors  $(A \vee B)$  et  $AB$  sont associés (propr 36.1).
4.  $\diamond$  Si  $F$  et  $G$  sont deux fractions rationnelles, alors  
 $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$   
 $\deg(FG) = \deg F + \deg G$  (propr 37)
5.  $\diamond$  détermination de la partie polaire d'un pôle simple (propr 39) et du résidu d'ordre maximal d'un pôle double (P40)
6. Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$  (exemple sous th9)

**Les élèves  $\diamond$  ne seront interrogés que sur les démonstrations  $\diamond$  (voir page suivante les groupes de colles).**

Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.

**Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.**

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève aura à factoriser un polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$  et à décomposer une fraction rationnelle en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  ( nous n'avons pas encore traité d'exemples de décomposition sur  $\mathbb{R}$  avec éléments simples de deuxième espèce, ce sera pour le prochain programme de colle). Les élèves doivent connaître la forme de cette décomposition, elle ne doit pas être donnée. Il doivent savoir utiliser cette décomposition pour calculer une somme. Les exercices porteront ensuite sur l'arithmétique dans  $\mathbb{K}[X]$ , puis, s'il reste du temps, sur le lien entre coefficients et racines (résolution de systèmes), les équations polynomiales, la multiplicité des racines, la dérivation des polynômes, ... .

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal  
◊ El Hadi Mohammed Rayane  
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël  
◊ Lorimier Wyatt  
◊ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux  
◊ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme  
Watbot Nathan  
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel  
Mille Aslan  
Lejeune Yoann

G6 ◊ Minart Nathanaël  
Daoudi Naïm  
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael  
David Corentin  
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◊ El Chaouch Maïssaâ  
Nehlig Nathanaëlle  
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha  
Houset Esteban  
Rocheran Martin

G11 ◊ Hallot Elouan  
Prudhomme Esteban

G12 ◊ Petit Inès  
Habib Salma  
◊ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément  
◊ Van Poecke Lucas  
Gallopain Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime  
Lourenço Millet Enzo  
Benoit Julien

G16 : groupe vide