

Semaine du 16/03

Chapitre 18 : Polynômes

Fractions rationnelles Corps $\mathbb{K}(X)$. La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\frac{1}{X - \lambda}$. Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$.

Chapitre 19 : Convexité

Généralités Définition. Interprétation géométrique. Inégalité de Jensen. Tout développement général sur les barycentres est hors programme. Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.

Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables Caractérisation des fonctions convexes dérivables. Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Démonstrations :

1. Inégalité de Jensen (propriété 2)
2. Inégalité des pentes (lemme 1)
3. $\diamond$ Position de la courbe par rapport à ses tangentes (propriété 6)

Chapitre 20 : Analyse asymptotique

Relations de comparaison : cas des fonctions

Relations de domination et de négligeabilité en un point a de $\mathbb{R}$. Lien entre ces relations. Notations $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$, $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$. La relation $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ est définie à partir du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Règles usuelles de manipulation des symboles o et O . Négligeabilités de référence.

Relation d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$: définition. Equivalents classiques en 0.

Démonstrations :

1. $\diamond$ Si $f = o(g)$ alors $f = o(g)$. Si $f = o(g)$ et $h = O(g)$, alors $fh = o(gi)$. Si $f = o(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = o(h)$ (prop 8)
2. $\diamond$ Soit f une fonction définie sur I . Supposons que f est dérivable en $x_0 \in I$ et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors $f(x) - f(x_0) \sim_{x_0} f'(x_0)(x - x_0)$. Application à l'obtention d'un équivalent de $\tan$ (fait en classe), de $\arcsin$ (pas fait en classe, à vous de jouer!).
3. Obtention des quatre négligeabilités de référence à partir des croissances comparées

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).

Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.

Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève deva donner deux équivalents classiques parmi les suivants au voisinage de 0 :

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\operatorname{Arctan}(x) \sim x$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\operatorname{sh} x \sim x$$

$$\operatorname{th} x \sim x$$

$$\text{Si } \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$1 - \operatorname{ch} x \sim \frac{-x^2}{2}$$

Chaque élève aura à décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ une fraction rationnelle **faisant intervenir au moins un élément simple de seconde espèce** puis à utiliser cette décomposition pour déterminer des primitives ou calculer des dérivées n -ièmes. Les exercices porteront ensuite sur la convexité (obtention d'une inégalité de convexité ou exercice plus théorique), et s'il reste du temps, sur les relations de négligeabilité et de domination (pas encore de propriété vue sur la relation d'équivalence à part celle proposée en démonstration de colle ; on pourra cependant vérifier, en revenant à la limite du quotient, que deux fonctions sont équivalentes).

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal
El Hadi Mohammed Rayane
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël
◇ Lorimier Wyatt
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël
Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès
Habib Salma
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopain Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide