

Semaine du 23/03

Chapitre 20 : Analyse asymptotique

Relations de comparaison : cas des fonctions Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$. Lien entre ces relations. Notations $f(x) = O_{x \rightarrow a}(g(x))$, $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$. La relation $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ est définie à partir du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$, on donne les deux formes $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow_{x \rightarrow a} 1$ et $f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \rightarrow 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^b(x)$, x^a , e^{cx} en $+\infty$, de $\ln^b(x)$, x^a en 0. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O . Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f , g , h vérifient $f \leq g \leq h$ et si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} h(x)$, alors $g(x) \sim_{x \rightarrow a} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Relations de comparaison : cas des suites Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.

Développements limités Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit. On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathcal{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Démonstrations :

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \bar{\mathbb{R}}$ et si $f \sim g$ au voisinage de x_0 alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.
Réciproquement, si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors $f \sim g$ au voisinage de x_0 .
La réciproque est fautive si $l = 0$ ou $l = \pm\infty$, contre-exemples à donner (propr 11)
2. $\diamond \sim$ est une relation transitive sur l'ensemble des fonctions définies sur I . $\sim$ est compatible avec la multiplication mais **NI AVEC L'ADDITION NI AVEC LA COMPOSITION** (contre-exemples à donner, propr 13)
3. Obtention d'un équivalent par encadrement : si f , g et h sont trois fonctions réelles définies sur I telles que $f \leq g \leq h$ au voisinage de x_0 et si f et h sont équivalentes à une même fonction i alors $g \sim_{x_0} i$ (propr 17)
4. Unicité du DL de f à l'ordre n en x_0 (propr 31)
5. $\diamond$ DL d'une fonction paire, impaire (propr 33)
6. $\diamond f$ admet un DL à l'ordre 0 au voisinage de 0 ssi f admet une limite finie en 0 (propr 35). Soit f une fonction définie en 0. f admet un DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 ssi f est

dérivable en 0 (propr 36).

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).

Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.

Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattrapper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus et donner quelques DL de référence en 0 (parmi $\exp$, $\sin$, $\cos$, sh , ch , $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec diverses valeurs de α). Les exercices porteront ensuite sur la recherche d'équivalents de fonctions ou de suites, sur l'obtention du DL d'une combinaison linéaire et d'un produit, sur la formule de Taylor-Young, sur les relations de domination ou de négligeabilité. La primitivation et la composition des DL n'ont pas encore été vus, le DL d'un quotient non plus, ni l'application à l'étude locale d'une fonction ou à la recherche d'asymptote.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal
El Hadi Mohammed Rayane
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël
◇ Lorimier Wyatt
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël
Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès
Habib Salma
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopain Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide