

Semaine du 30/03

## Chapitre 20 : Analyse asymptotique

**Développements limités** Développement limité à l'ordre  $n$  d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature. Le développement limité à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $a$  peut se ramener à celui de  $h \mapsto f(a+h)$  en 0. Signe de  $f$  au voisinage de  $a$ .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^n$ , développement limité à l'ordre  $n$  en 0 de  $h \mapsto f(a+h)$ . Développement limité à tout ordre en 0 de  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $\operatorname{Arctan}$ . Développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $\tan$ .

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction. Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

**Problèmes d'analyse asymptotique** Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.

Démonstrations :

1. Formule de Taylor-Young (th1)
2. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur (P42 et P43).
3.  $\diamond$  Obtention du DL à l'ordre 5 en 0 de  $\tan$  (sous P41) et du DL à l'ordre  $2p+1$  en 0 de  $\operatorname{Arctan}$  (sous th2).
4.  $\diamond$  Etude des branches infinies de  $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{4x-1}{x+1}}$  (paragraphe 8.5).

## Chapitre 21 : Espaces vectoriels

**Espaces vectoriels** Structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Espaces  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ . Produit d'un nombre fini de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Espace  $\mathbb{K}^\Omega$ , cas particulier  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.

**Sous-espaces vectoriels** Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.

Démonstrations :

1.  $\diamond (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (exemple sous D1).
2.  $\diamond \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$  est un sev de  $\mathbb{R}^n$  et  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1\}$  n'en est pas un (exemple sous P3).

**Les élèves  $\diamond$  ne seront interrogés que sur les démonstrations  $\diamond$  (voir page suivante les groupes de colles).**

Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.

**Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.**

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite montrer qu'un ensemble donné (de vecteurs de  $R^n$ , de polynômes, de fonctions, de suites ou de matrices), dont il précisera au moins deux éléments, est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence, puis qu'un autre ensemble donné (dont on déterminera aussi deux éléments) n'est pas un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence. Chaque élève devra enfin déterminer le DL d'un quotient et celui d'une composée puis, à partir d'un de ces DL, faire l'étude locale de la courbe en un point  $x_0$  (équation et tracé de la tangente, allure de la courbe au voisinage du point d'abscisse  $x_0$ ). S'il reste du temps, les exercices porteront ensuite sur les applications des développements limités : recherche d'équivalents d'une somme, étude de formes indéterminées, étude d'extrema, étude de branches infinies, développements asymptotiques,...

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal  
El Hadi Mohammed Rayane  
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël  
◇ Lorimier Wyatt  
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux  
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme  
Watbot Nathan  
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel  
Mille Aslan  
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël  
Daoudi Naïm  
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael  
David Corentin  
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ  
Nehlig Nathanaëlle  
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha  
Houset Esteban  
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan  
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès  
Habib Salma  
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément  
◇ Van Poecke Lucas  
Gallopain Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime  
Lourenço Millet Enzo  
Benoit Julien

G16 : groupe vide