Semaine du 04/05

Chapitre 22 : Intégration

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$. Interprétation géométrique de l'intégrale. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale ou inégalité de la valeur absolue. Relation de Chasles. Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$, alors f = 0. Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période. Valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
Sommes de Riemann Pour f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, on a lorsque $n \to +\infty$, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n} \to \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Interprétation géométrique. Démonstration exigible pour f lipschitzienne.
Lien entre intégrale et primitive Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ pour f continue.

Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.
Formules de Taylor globales Formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales.
Intégration des fonctions à valeurs complexes Brève extension des définitions et résultats précédents.

Chapitre 23 : Applications linéaires

Généralités Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition. Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire.
Endomorphismes Identité, homothéties. Notations id_E , id. Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. Projection ou projecteur, symétrie : définition géomé- trique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = id$. On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Automorphismes. Groupe linéaire. Notation $\mathcal{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \mathcal{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstrations :

1. $\diamond$ Image directe d'un sous-espace par une application linéaire. (théorème 2)
2. Image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. (théorème 3)
3. Si f est un isomorphisme de E alors f^{-1} est aussi un isomorphisme de E (P3).

4. $\diamond$ (théorème 4) Soit f une application linéaire de E dans F. Les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$
   (c) $\forall x \in E,\ f(x) = 0_F \implies x = 0_E$.
5. $\diamond$ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$(propr 8)
6. Soit s une symétrie de E, alors s est linéaire et $s \circ s = \mathrm{id}_E$ (propr 9.1)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite

— montrer qu'une application donnée est linéaire, définir son noyau et son image (voir ex 6 td23 par exemple).
— étudier rapidement une fonction du type $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$: ensemble de définition, dérivabilité et calcul de la dérivée (on introduira systématiquement une primitive de f sur un intervalle pertinent, voir ex 12 du TD22 par exemple)
— reconnaître une somme de Riemann et déterminer sa limite.

S'il reste du temps, les exercices porteront sur les formules de Taylor globales, sur l'intégration des fonctions à valeurs complexes, sur le lien entre primitive et intégrale...

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal
El Hadi Mohammed Rayane
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël
◇ Lorimier Wyatt
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël
Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès
Habib Salma
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopin Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide