

Semaine du 18/05

## Chapitre 23 : Applications linéaires

**Généralités** Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque. Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Bilinéarité de la composition. Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire.

**Endomorphismes** Identité, homothéties. Notations  $id_E$ ,  $id$ . Anneau  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ . Notation  $vu$  pour la composée  $v \circ u$ . Notation  $u^k$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par  $p^2 = p$ , par  $s^2 = id$ . On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Automorphismes. Groupe linéaire. Notation  $\mathcal{GL}(E)$ . Notation  $u^k$  pour  $u \in \mathcal{GL}(E)$  et  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Chapitre 24 : Dimension des espaces vectoriels

**Familles de vecteurs** Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée. Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Im } u = \text{Vect } (u(x_i))_{i \in I}$ . Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts (voir méthode 16.4). Base, coordonnées. Bases canoniques de  $K^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $K_n[X]$ ,  $K[X]$ . Bases de polynômes à degrés échelonnés dans  $K[X]$  et  $K_n[X]$ .

**Existence de bases** Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  engendre  $E$  et si  $(x_i)_{i \in I}$  est libre pour une certaine partie  $I$  de  $[[1, n]]$ , alors il existe une partie  $J$  de  $[[1, n]]$  contenant  $I$  pour laquelle  $(x_j)_{j \in J}$  est une base de  $E$ . Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

**Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie** Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de  $n+1$  vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie. Dimension de  $\mathbb{K}^n$ , de  $\mathbb{K}_n[X]$ , de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Dans un espace de dimension  $n$ , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de  $n$  vecteurs.

Dimension de  $E \times F$ , de  $\mathcal{L}(E, F)$  si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

**Sous-espaces et dimension** Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

**Détermination d'une application linéaire** Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ , alors il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $u(e_i) = f_i$ . Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de  $u$ . Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces

de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Application linéaire de rang fini. Notation  $\text{rg}(u)$ . Le rang de  $v \circ u$  est majoré par  $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$ . Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

**Théorème du rang** Forme géométrique du théorème du rang : si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $G$  est un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$ , alors  $u$  induit un isomorphisme de  $G$  sur  $\text{Im } u$ . Théorème du rang : si  $E$  est de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $n = \dim(\text{Ker } u) + \text{rg}(u)$ .

Démonstrations :

1.  $\diamond$  Si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $F$ , alors il existe une unique application  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que, pour tout  $i \in I$ ,  $u(e_i) = f_i$ . Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de  $u$  (propr 13)
2.  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Toute famille libre a au plus  $n$  éléments. Toute famille génératrice a au moins  $n$  éléments. Toute famille libre de  $n$  vecteurs est une base.  
Toute famille génératrice de  $n$  vecteurs est une base (propr 14)
3.  $\diamond$  Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension (propr 15)
4.  $\diamond$  Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives  $n$  et  $m$  ( $n$  et  $m$  non nuls). L'espace vectoriel produit  $E \times F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\dim E \times F = \dim E + \dim F$  (paragraphe 2.7).
5. Formule de Grassman (th5)
6. Théorème du rang (th7)

**Les élèves  $\diamond$  ne seront interrogés que sur les démonstrations  $\diamond$  (voir page suivante les groupes de colles).**

Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.

**Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.**

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite

- déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire en utilisant la propriété 2 (si  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  est une famille génératrice de  $E$  alors  $f(\mathcal{F}) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$  est une famille génératrice de  $\text{Im } f$ ) et le théorème du rang. En déduire si l'application est surjective, injective, bijective (modèle ex du cours sous th7).
- déterminer une base de  $F, G, F + G, F \cap G$  ( $F$  et  $G$  étant deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ ) en utilisant la formule de Grassmann (modèle exercice du cours sous rq6 page 8)

S'il reste du temps, les exercices pourront aussi être plus théoriques sur le noyau, l'image et le rang d'une application linéaire ou sur symétries et projections.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal  
El Hadi Mohammed Rayane  
Darkaoui Anis

G2 Merluzzi Rafaël  
◇ Lorimier Wyatt  
◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux  
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme  
Watbot Nathan  
Huyard Maëlys

G5 Pigeon Gabriel  
Mille Aslan  
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël  
Daoudi Naïm  
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 Lieven Raphael  
David Corentin  
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ  
Nehlig Nathanaëlle  
Makosso Ilendot Christ

G10 Vanlierde Sacha  
Houset Esteban  
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan  
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès  
Habib Salma  
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément  
◇ Van Poecke Lucas  
Gallopain Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime  
Lourenço Millet Enzo  
Benoît Julien

G16 : groupe vide