Ex sous Rq 9 $\quad rg(\mathcal{F}) = \dim(F)$ où $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ est génératrice de F. $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre sur $\mathbb{R}$?

Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tq $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3+\delta u_4 = 0_{\mathbb{R}^5}$, ce qui est équivalent à

$$\alpha(2,3,-3,4,2)+\beta(3,6,-2,5,9)+\gamma(7,18,-2,7,7)+\delta(2,4,-2,3,1)=(0,0,0,0,0)$$

ssi $0_{\mathbb{R}^5}=(2\alpha+3\beta+7\gamma+2\delta,\ 3\alpha+6\beta+18\gamma+4\delta,\ -3\alpha-2\beta-2\gamma-2\delta,\ 4\alpha+5\beta+7\gamma+3\delta,\ 2\alpha+9\beta+7\gamma+\delta)$

ssi $\begin{cases} 2\alpha+3\beta+7\gamma+2\delta=0 \\ 3\alpha+6\beta+18\gamma+4\delta=0 \\ -3\alpha-2\beta-2\gamma-2\delta=0 \\ 4\alpha+5\beta+7\gamma+3\delta=0 \\ 2\alpha+9\beta+7\gamma+\delta=0 \end{cases}$ ssi $L_2\leftarrow\frac{1}{3}L_2$ $\begin{cases} 2\alpha+3\beta+7\gamma+2\delta=0 \\ \alpha+2\beta+6\gamma+\frac{4}{3}\delta=0 \\ -3\alpha-2\beta-2\gamma-2\delta=0 \\ 4\alpha+5\beta+7\gamma+3\delta=0 \\ 2\alpha+9\beta+7\gamma+\delta=0 \end{cases}$

ssi $L_1\leftrightarrow L_2$ $\begin{cases} \alpha+2\beta+6\gamma+\frac{4}{3}\delta=0 \\ 2\alpha+3\beta+7\gamma+2\delta=0 \\ -3\alpha-2\beta-2\gamma-2\delta=0 \\ 4\alpha+5\beta+7\gamma+3\delta=0 \\ 2\alpha+9\beta+7\gamma+\delta=0 \end{cases}$ ssi $\begin{matrix} L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+3L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-4L_1 \\ L_5\leftarrow L_5-2L_1 \end{matrix}$ $\begin{cases} \alpha+2\beta+6\gamma+\frac{4}{3}\delta=0 \\ -\beta-5\gamma-\frac{2}{3}\delta=0 \\ 4\beta+16\gamma+2\delta=0 \\ -3\beta-17\gamma-\frac{7}{3}\delta=0 \\ 5\beta-5\gamma-\frac{5}{3}\delta=0 \end{cases}$

ssi $\begin{matrix} L_3\leftarrow L_3+4L_2 \\ L_4\leftarrow L_4-3L_2 \\ L_5\leftarrow L_5+5L_2 \end{matrix}$ $\begin{cases} \alpha+2\beta+6\gamma+\frac{4}{3}\delta=0 \\ -\beta-5\gamma-\frac{2}{3}\delta=0 \\ -4\gamma-\frac{2}{3}\delta=0 \\ -2\gamma-\frac{1}{3}\delta=0 \\ -30\gamma-5\delta=0 \end{cases}$ ssi $\begin{matrix} L_4\leftarrow\frac{1}{2}L_3 \\ L_5\leftarrow\frac{15}{2}L_3 \end{matrix}$ $\begin{cases} \alpha+2\beta+6\gamma+\frac{4}{3}\delta=0 \\ -\beta-5\gamma-\frac{2}{3}\delta=0 \\ -4\gamma-\frac{2}{3}\delta=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \alpha=-2\beta-6\gamma-\frac{4}{3}\delta=2\gamma-6\gamma+8\gamma=4\gamma \\ \beta=-5\gamma-\frac{2}{3}\delta=-5\gamma+\frac{12}{3}\gamma=-\gamma \\ \delta=-6\gamma \\ \gamma\in\mathbb{R} \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \alpha=4\gamma \\ \beta=-\gamma \\ \delta=-6\gamma \\ \gamma\in\mathbb{R} \end{cases}$

Si $\gamma=1$ par exemple alors $\alpha=4$, $\beta=-1$ et $\delta=-6$

On a donc $4u_1-u_2+u_3-6u_4=0$ càd $u_3=-4u_1+u_2+6u_4$

Donc $\mathcal{F}$ n'est pas libre (on a trouvé une CL à résultat nul non triviale)

Donc $\mathcal{G}=(u_1,u_2,u_3)$ est géné de F. $\mathcal{G}$ est-elle une famille libre sur $\mathbb{R}$?

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tq $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^5}$ alors $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3+0u_4=0_{\mathbb{R}^5}$

D'après les calculs précédents on obtient : $\begin{cases} \alpha+2\beta+6\gamma=0 \\ -\beta-5\gamma=0 \\ -4\gamma=0 \end{cases}$

on remplace δ par 0 dans le 5e système

donc $\alpha=\beta=\gamma=0$

Donc $\mathcal{G}$ est libre

Donc $\mathcal{G}$ est une base de F

Donc $\dim(F)=\mathrm{Card}(\mathcal{G})=3$ donc $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F}))=3$

donc $\boxed{rg(\mathcal{F})=3}$