

Semaine du 26/05

Chapitre 24 : Dimension des espaces vectoriels

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie. Dimension de \mathbb{K}^n , de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants. Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.

Dimension de $E \times F$, de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Sous-espaces et dimension Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

Détermination d'une application linéaire Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u . Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Application linéaire de rang fini. Notation $\text{rg}(u)$. Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Théorème du rang Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si G est un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de G sur $\text{Im } u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $n = \dim(\text{Ker } u) + \text{rg}(u)$.

Formes linéaires et hyperplans Forme linéaire. Formes coordonnées relativement à une base. Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie. Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan. En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans. Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de R^2 , des droites et plans vectoriels de R^3 . L'étude de la dualité est hors programme

Démonstrations :

1. Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme (propr 23).
2. \diamond Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et H un sous-espace vectoriel de E . H est un hyperplan de E si et seulement si H est de dimension $n - 1$ (propr 26).
3. Etant données deux formes linéaires non nulles f et g telles que $\text{ker } f = \text{ker } g$, il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $f = \lambda g$ (propr 27).

Chapitre 25 : Séries

Vocabulaire propre aux séries : terme général, suite des sommes partielles, nature, somme lorsque la série converge, reste d'ordre n .

La somme de deux séries convergentes est convergente, le produit d'une série convergente par un scalaire est une série convergente, une combinaison linéaire de deux séries convergentes est convergente.

Situation de divergence grossière (si $\lim u \neq 0$ alors $\sum u_n$ diverge).

Séries de référence : série harmonique, séries géométriques, séries télescopiques, séries de Riemann.

Séries à termes positifs : convergence ssi la suite des sommes partielles est majorée. Comparaison série-intégrale. Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Théorème d'équivalence. Comparaison série-série.

Convergence absolue : définition. Toute série numérique absolument convergente est convergente. Inégalité triangulaire. Règle de domination.

Démonstrations :

- \diamond la série harmonique diverge et $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \sim \ln(n)$ (P6)
- \diamond Si $a > 1$, $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (th1 cas $\alpha > 1$)
- Règle de comparaison des séries à termes positifs (th2)

Les élèves \diamond ne seront interrogés que sur les démonstrations \diamond (voir page suivante les groupes de colles).

Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.

Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattrapper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite

- déterminer rapidement le rang d'une famille de vecteurs (pas encore de formalisme matriciel)
- déterminer la nature de trois séries
 - l'une en étudiant la nature de la suite des sommes partielles associée,
 - l'autre en utilisant la règle de comparaison des séries à termes positifs (la technique du $n^\alpha u_n$ a été présentée avec trois exemples d'application où α était donné).
 - la dernière en utilisant la règle d'équivalence.

Un soin particulier sera apporté sur le vocabulaire employé autour des séries.

- travailler un exercice concernant les hyperplans, les formes linéaires ou les formes coordonnées relativement à une base.

S'il reste du temps, les exercices pourront aussi être plus théoriques sur le rang d'une application linéaire.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les

exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal El Hadi Mohammed Rayane Darkaoui Anis	G9 ◊ El Chaouch Maïssaâ Nehlig Nathanaëlle Makosso Ilendot Christ
G2 Merluzzi Rafaël ◊ Lorimier Wyatt ◊ Villa Baptiste	G10 Vanlierde Sacha Houset Esteban Rocheran Martin
G3 Druard Margaux ◊ Cucherousset Jade	G11 ◊ Hallot Elouan Prudhomme Esteban
G4 Lippens Côme Watbot Nathan Huyard Maëlys	G12 ◊ Petit Inès Habib Salma ◊ Jemal Youssef
G5 Pageon Gabriel Mille Aslan Lejeune Yoann	G13 Hachet Clément ◊ Van Poecke Lucas Gallopain Noé
G6 ◊ Minart Nathanaël Daoudi Naïm Brochard-Dechilly Pauline	G14 : groupe vide
G7 : groupe vide	G15 Charvet Maxime Lourenço Millet Enzo Benoit Julien
G8 Lieven Raphael David Corentin Bidaux Brunelle Antoine	G16 : groupe vide