Suite ex matrices semblables sous DG

Rappel : $f(x,y,z) = (2x-y-z,\ 2x+y-2z,\ 3x-y-2z)$

$\varepsilon_1 = (1,1,2) \qquad \varepsilon_2 = (1,0,1)$

* recherche de ε_3

Soit $\varepsilon_3 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ ssi $(2x-y-z,\ 2x+y-2z,\ 3x-y-2z) = (x+1,\ y,\ z+1)$

ssi $\begin{cases} 2x-y-z = x+1 \\ 2x+y-2z = y \\ 3x-y-2z = z+1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x-y-z = 1 \\ 2x-2z = 0 \\ 3x-y-3z = 1 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} -y = 1 \\ x = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

On propose par exemple $\varepsilon_3 = (1,-1,1)$ (on a pris $z=1$)

* Mq $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Card $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Mq cette famille est libre

Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Alors $(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha-\gamma,\ 2\alpha+\beta+\gamma) = (0,0,0)$

Donc $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha = \gamma \\ 2\alpha+\beta+\gamma = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \beta = -2\gamma \\ \alpha = \gamma \\ 2\gamma-2\gamma+\gamma = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

Donc $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

On a bien trouvé une base $\mathcal{E}' = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tq $\operatorname{mat}_{\mathcal{E}'}(f) = B$

Donc A et B représentent le même endomorphisme (f) dans 2 bases de $\mathbb{R}^3$ ($\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$). Par P7, A et B sont semblables.

Le lien matériel est donné par la formule de changement de base :

$\operatorname{mat}_{\mathcal{E}'}(f) = P^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \times \operatorname{mat}_{\mathcal{E}}(f) \times P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ où $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

càd $B = P^{-1} A P$ avec $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$

càd $A = P B P^{-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = (PBP^{-1})^n = \overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\dots(PBP^{-1})}^{n \text{ facteurs}}$

$= P\,\underbrace{B(P^{-1}P)B \dots (P^{-1}P)B}\,P^{-1}$

$= P B^n P^{-1}$

reste à calculer P^{-1} et B^n.

Pour B^n, on utilise la formule du binôme de Newton car

$B = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $DN = ND$, le vérifier

On voit que $N^2 = O_{3,3}$ (N est nilpotente) et $D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D est diagonale)

On obtient après calculs (les faire, venir me voir en cas de pb).

$$B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ car } B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = \binom{n}{0} D^{n-0} N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1$$
$$= D^n + n D^{n-1} N$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ Pour obtenir P^{-1}, partir de $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ et utiliser le pivot de Gauss

et finalement $A^n = P B^n P^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 1 & n+1 \\ (-1)^n & 0 & -1 \\ 2(-1)^n & 1 & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-n-(-1)^n & -n & n+(-1)^n-1 \\ 1-(-1)^n & 1 & (-1)^n-1 \\ 2-n-2(-1)^n & -n & n+2(-1)^n-1 \end{pmatrix}$$