Semaine du 08/06

Chapitre 26 : Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans des bases Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Cas particulier des endomorphismes.

Application linéaire canoniquement associée à une matrice Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau, image et rang d'une matrice. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n. Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice tri- angulaire. Lien entre les diverses notions de rang. Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.

Changements de bases Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vec- teur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endo- morphisme. Exemples de recherche d'une base dans laquelle la ma- trice d'un endomorphisme donné est simple.

Matrices semblables et trace Matrices semblables. Interprétation géométrique. Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée. Trace d'une matrice carrée. Notation $\mathrm{tr}(A)$. Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr(uv)} = \mathrm{tr(vu)}$. Notation $\mathrm{tr}(u)$.

Matrices équivalentes et rang Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r , il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r. La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1. Matrices équivalentes. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r. Classification des matrices équivalentes par le rang. Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites. Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élé- mentaires conservent le rang.

Systèmes linéaires Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A. Structure affine de l'ensemble des solutions. Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution. Dans ce cas, le système est dit de Cramer.

Démonstrations :

— Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. M est inversible ssi $\mathrm{rg}(M) = n$ (propr 11).
— si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang r alors il existe un couple de bases par rapport auxquelles u a pour matrice J_r (propr 17)
— $\diamond$ A est de rang r ssi A est équivalente à J_r (propr 18)

Chapitre 27 : dénombrement

Cardinal d'un ensemble fini Cardinal d'un ensemble fini. Notations —A—, Card(A). Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme. Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quel- conque, complémentaire, différence, produit cartésien. La formule du crible est hors programme. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Listes et combinaisons Nombre de p -listes (ou p -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n , nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n. Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Démonstrations :
- $\diamond$ Cardinal de la réunion de deux ensembles finis disjoints (propr 3)
- $\diamond$ Cardinal du complémentaire, d'une union de deux ensembles finis quelconques, de l'ensemble des parties de E (propr 4, 5 et 15)
- Cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis (propr 6)

Les élèves $\diamond$ ne seront interrogés que sur les démonstrations $\diamond$ (voir page suivante les groupes de colles).
Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.
Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. En particulier chaque élève devra définir l'un des 4 termes suivants : p-liste, p-arrangement, p-combinaison, permutation d'un ensemble à n éléments (et en préciser le nombre) puis il devra déterminer rapidement le rang d'une matrice, son noyau et son image. Les exercices porteront ensuite sur le dénombrement, sur le rang d'une famille, sur la formule de changement de bases, sur les matrices équivalentes, sur la résolution d'un système et son interprétation, sur les systèmes de Cramer.
Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maitrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maitriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

Darkaoui Anis

G1 Meddah Bilal
$\diamond$ El Hadi Mohammed Rayane

G2 Merluzzi Rafaël
$\diamond$ Lorimier Wyatt

◇ Villa Baptiste

G3 Druard Margaux
◇ Cucherousset Jade

G4 Lippens Côme
Watbot Nathan
Huyard Maëlys

G5 Pageon Gabriel
Mille Aslan
Lejeune Yoann

G6 ◇ Minart Nathanaël
◇ Daoudi Naïm
Brochard-Dechilly Pauline

G7 : groupe vide

G8 ◇ Lieven Raphael
David Corentin
Bidaux Brunelle Antoine

G9 ◇ El Chaouch Maïssaâ
Nehlig Nathanaëlle
Makosso Ilendot Christ

G10 ◇ Vanlierde Sacha
Houset Esteban
Rocheran Martin

G11 ◇ Hallot Elouan
Prudhomme Esteban

G12 ◇ Petit Inès
Habib Salma
◇ Jemal Youssef

G13 Hachet Clément
◇ Van Poecke Lucas
Gallopin Noé

G14 : groupe vide

G15 Charvet Maxime
Lourenço Millet Enzo
Benoit Julien

G16 : groupe vide