

Semaine du 15/06

## Chapitre 27 : dénombrement

En exercices

## Chapitre 28 : déterminant

**Formes  $n$ -linéaires alternées** Forme  $n$ -linéaire alternée sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Antisymétrie, effet d'une permutation. Si  $f$  est une forme  $n$ -linéaire alternée et si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille liée, alors  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

**Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base** Si  $B$  est une base, il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  pour laquelle  $f(B) = 1$ ; toute forme  $n$ -linéaire alternée est un multiple de  $\det_B$ . Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Dans  $R^2$  (resp.  $R^3$ ), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède). Comparaison, si  $e$  et  $e_0$  sont deux bases, de  $\det_B$  et  $\det_{B_0}$ . La famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base si et seulement si  $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ .

**Déterminant d'un endomorphisme** Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée. Caractérisation des automorphismes.

**Déterminant d'une matrice carrée** Déterminant d'une matrice carrée. Caractère  $n$ -linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. Déterminant d'un produit. Relation  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ . Caractérisation des matrices inversibles. L'application  $\det$  induit un morphisme de  $GL(E)$  (resp.  $GL_n(\mathbb{K})$ ) sur  $\mathbb{K}$ . Déterminant d'une transposée. Caractère  $n$ -linéaire alterné du déterminant par rapport aux lignes.

**Calcul des déterminants** Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.

**Comatrice** Comatrice. Notation  $\text{Com}(A)$ . Relation  $A \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$ . Expression de l'inverse d'une matrice inversible

### Démonstrations :

- $\diamond$  Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E$ .  $\varphi$  est alternée si et seulement si elle est antisymétrique (propr 3).
- Dimension 2 : expression d'une forme bilinéaire alternée dans une base en fonction des coordonnées. Si  $B$  est une base, il existe une unique forme bilinéaire alternée  $f$  pour laquelle  $f(B) = 1$ ; toute forme bilinéaire alternée est un multiple de  $f$  (propr 5 items 0, 1 et 2)
- Expression d'une forme trilinéaire alternée dans une base en fonction des coordonnées (propr 7.2 puis 10).
- $\diamond$  Soit  $\sigma$  une permutation de  $[[1, n]]$ . On définit sur  $[[1, n]]$  la relation binaire  $R$  suivante :  $i_1 R i_2$  ssi  $\exists k \in \mathbb{Z} i_2 = \sigma^k(i_1)$ .  $R$  est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de  $x$  pour  $R$  est l'ensemble  $\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$  (orbite de  $x$ ) (propr 12).
- Soit  $B$  une base de  $E$ . SI la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base de  $E$  alors  $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  (propr 21 qui utilise la propr 20, la démonstration des deux doit être connue)
- $\diamond$  Propriétés du déterminant d'un endomorphisme (propr 24)

1.  $\det(\text{id}_E) = 1$ ,
2.  $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \det(\alpha u) = \alpha^n \det(u)$ ,
3.  $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(u \circ v) = \det u \times \det v$ ,
4.  $\forall u \in \mathcal{L}(E), u \in GL(E)$  ssi  $\det u \neq 0$  et dans ce cas  $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$ .

## Chapitre 29 : probabilités, révisions de première et terminale

**Univers, événements** Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités. On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles). Une variable aléatoire  $X$  est une application définie sur l'univers  $\Omega$  à valeurs dans un ensemble  $E$ .

**Espaces probabilisés finis** Probabilité sur un univers fini. Une distribution de probabilités sur un ensemble  $E$  est une famille d'éléments de  $R^+$  indexée par  $E$  et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance

**Probabilités conditionnelles** Si  $P(B) > 0$ , la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$  est définie par la relation  $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ . L'application  $P_B$  est une probabilité. Formules des probabilités composées, des probabilités totales.

**Événements indépendants** Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Les élèves  $\diamond$  ne seront interrogés que sur les démonstrations  $\diamond$  (voir page suivante les groupes de colles).**

Il y a trois groupes de colles vides : les groupes 7, 14 et 16.

**Tout élève absent doit signaler son absence au plus tôt au colleur par l'intermédiaire du cahier de prépa, AVANT la colle ! et doit ensuite contacter le colleur pour rattraper cette colle à son retour.**

Chaque élève sera interrogé en début de colle sur des questions de cours et devra restituer une démonstration parmi celles listées ci-dessus. Chaque élève devra ensuite rapidement

- déterminer la signature d'une permutation après l'avoir décomposée en produit de  $p$ -cycles puis de transpositions
- développer suivant une ligne ou une colonne pour déterminer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 simple pour décider si un endomorphisme donné est un automorphisme, si une famille donnée est une base d'un espace-vectoriel, si un système donné est de Cramer ou si une matrice donnée est inversible.
- mettre en oeuvre la formule des probabilités composées ou la formule des probabilités totales dans un contexte simple en précisant bien l'hypothèse à vérifier.

Les exercices porteront ensuite sur le calcul du déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme ou d'une matrice, sur les propriétés du déterminant ou des formes bilinéaires,  $n$ -linéaires alternées, les permutations (classes d'équivalence ou puissances), ou sur le dénombrement. Aucun calcul de déterminant de matrices d'ordre supérieur à 3 n'a été effectué encore en classe mais le principe du développement suivant une ligne ou une colonne a été expliqué et mis en oeuvre sur un exemple (ordre 3). Des exercices sur des déterminants d'ordre supérieurs à 3 guidés sont tout à fait envisageables. Un soin particulier sera apporté au vocabulaire employé dans les exercices sur le dénombrement et le calcul de probabilités. Il faut bien maîtriser le vocabulaire.

Une note sur 20 sera donnée à l'issue de la colle, qui sera décomposée en une note sur 10 relative à son niveau de maîtrise des connaissances du cours tout au long de la colle (y compris dans les exercices) et une note sur 10 relative à sa capacité à calculer, à chercher, à raisonner, à mettre en oeuvre des méthodes et des stratégies, à maîtriser le formalisme mathématique, à argumenter et à communiquer.

Groupes de colle :

G1 Meddah Bilal ◊ El Hadi Mohammed Rayane Darkaoui Anis	G9 ◊ El Chaouch Maïssaâ Nehlig Nathanaëlle Makosso Ilendot Christ
G2 Merluzzi Rafaël ◊ Lorimier Wyatt ◊ Villa Baptiste	G10 ◊ Vanlierde Sacha Houset Esteban Rocheran Martin
G3 Druard Margaux ◊ Cucherousset Jade	G11 ◊ Hallot Elouan Prudhomme Esteban
G4 Lippens Côme Watbot Nathan Huyard Maëlys	G12 ◊ Petit Inès Habib Salma ◊ Jemal Youssef
G5 Pigeon Gabriel Mille Aslan Lejeune Yoann	G13 Hachet Clément ◊ Van Poecke Lucas Gallopain Noé
G6 ◊ Minart Nathanaël ◊ Daoudi Naïm Brochard-Dechilly Pauline	G14 : groupe vide
G7 : groupe vide	G15 Charvet Maxime Lourenço Millet Enzo Benoit Julien
G8 ◊ Lieven Raphael David Corentin Bidaux Brunelle Antoine	G16 : groupe vide