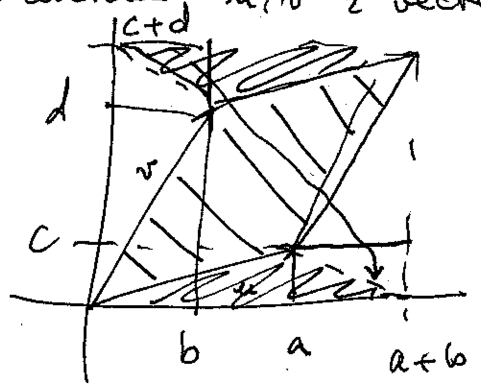
Plan usuel muni d'1 base $\mathcal{B}$ orthonormée

On considère u, v 2 vecteurs de coord $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.



on forme le parallélogramme P engendré par u et v d'aire $\mathcal{A}$

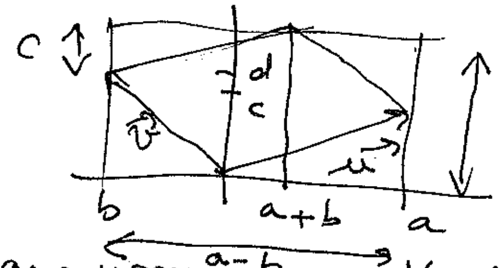
$\mathcal{A}$ = aire du gd rectangle de côtés de longueur $a+b$ et $c+d$ à laquelle on retranche l'aire des 4 triangles

aire des 2 triangles verts : $(a+b)c$.

aire des 2 autres triangles : $(c+d)\,b$.

$\mathcal{A} = (a+b)(c+d) - (a+b)c - (c+d)b = ad - bc$.

Autre ex :



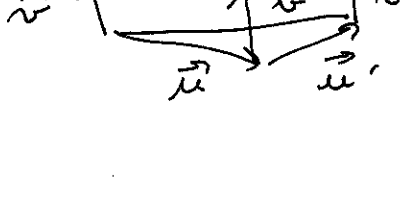
la formule que nous venons d'obtenir dépend fortement de la posit° des vecteurs

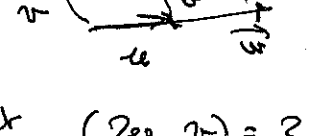
L'aire ici vaudra $(-1)\times(ad-bc)$. ~~mais~~

Le dét est donc, au signe près, l'aire du parallélogramme engendré par u et v.

Rq : on retrouve :

$\det_{\mathcal{B}}(u,v) + \det_{\mathcal{B}}(u',v) = \det_{\mathcal{B}}(u+u',v)$

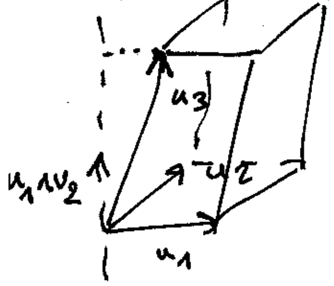




$\det_{\mathcal{B}}(2u, v) = 2\det_{\mathcal{B}}(u,v)$.

Si u et v col : $\det_{\mathcal{B}}(u,v) = 0$.

Étant donnée une bod $\mathcal{B}$ de l'espace usuel E et 3 vect u_1, u_2 et u_3 de coord $\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{B}$. On tente d'exprimer le volume V du parallélépipède P engendré par u_1, u_2 et u_3 en fct des u_{ij}



$V = \underbrace{\text{aire du para de base engendrée par } u_1 \text{ et } u_2}_{\| u_1 \wedge u_2 \|} \times \underbrace{\text{hauteur de P}}_{\text{composante de } u_3 \text{ selon } u_1 \wedge v_2}$

$= \frac{1}{\|u_1 \wedge v_2\|} (u_1 \wedge v_2) \cdot u_3$

$= | (u_1 \wedge v_2) \cdot u_3 |$

Si u_1, u_2 et u_3 obéissent à la règle de la main droite $(u_1 \wedge v_2) \cdot v_3 > 0$ sinon c'est < 0.

$\det_{\mathcal{B}} (u_1, v_2, v_3)$ est égal au volume "orienté" du parallélépipède engendré par u_1, u_2 et u_3