dem P15

Soit $x \in E$, on sait que $p_F(x) \in F$ et $p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$

donc $p_F(x) \perp p_{F^\perp}(x)$

D'après le th de Pythagore, on a donc :

$$\| p_F(x) + p_{F^\perp}(x) \|^2 = \| p_F(x) \|^2 + \| p_{F^\perp}(x) \|^2$$

or $p_F(x) + p_{F^\perp}(x) = x$, d'où

$$\|x\|^2 = \| p_F(x) \|^2 + \| p_{F^\perp}(x) \|^2$$

donc $\| p_F(x) \|^2 = \|x\|^2 - \| p_{F^\perp}(x) \|^2 \leq \|x\|^2$

donc $\sqrt{\| p_F(x) \|^2} \leq \sqrt{\|x\|^2}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $\| p_F(x) \| \leq \|x\|$

démonstration du th 3

(1) Soit F un sous-espace vectoriel de E

On sait déjà que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ par P7

Reste donc à montrer que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

Disjonction de cas :

- si $F = \{0_E\}$ alors $F^\perp = E$ d'après P9
- si $F = E$, alors $F^\perp = \{0_E\}$ d'après P9

} dans les 2 cas, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$

- sinon $\dim F \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On pose $\dim F = p$

Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F

Par le th de la base incomplète on complète B en une ~~fam~~ base $B' = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E, puis, par le procédé de Gram-Schmidt, on orthonormalise cette base B'.

On obtient $B'' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une bon de E

telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$

or $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ donc $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille orthonormée de F (donc libre) qui est génératrice de F.

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est donc une base orthonormée de F

$(\varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$ est une base orthonormale d'un autre sev de E que l'on note G. F et G sont supplémentaires dans E par construction, donc $\dim G = \dim E - \dim F = n - p$.

De plus tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G

donc $G \subset F^\perp$ donc $\underline{\dim G \leq \dim(F^\perp)}$

D'autre part $\dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap F^\perp)$

or $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ donc $\dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp$

or $F + F^\perp$ est un sev de E (somme de 2 sev de E)

donc $\dim(F + F^\perp) \leq n$ donc $\dim F^\perp \leq n - \dim F$

càd $\dim F^\perp \leq n - p$ donc $\underline{\dim F^\perp \leq \dim G}$

puisque $\dim G = n - p$.

Ainsi $\dim F^\perp = \dim G$ et $G \subset F^\perp$ donc $G = F^\perp$

Donc F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E

(2) Comme F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E,
$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ donc $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$

(3) tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de $F^\perp$
donc $F \subset (F^\perp)^\perp$

De plus $\dim F^\perp = n - \dim F$ par (2)
donc $\dim (F^\perp)^\perp = n - \dim (F^\perp)$
donc $\dim (F^\perp)^\perp = n - (n - \dim F) = \dim F$

Comme $F \subset (F^\perp)^\perp$ et $\dim F = \dim (F^\perp)^\perp$, on a $F = (F^\perp)^\perp$