

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{k=1}^m k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{Z}(n): \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* initialisation pour $n = 1$:

$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1$ donc $S(1)$ est vraie

* hérédité: on suppose que $P(n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^+$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

nel de Charles

lypderic (HR)

$$= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + \frac{4(n+1)^2 (n+1)}{4}$$

$$= \frac{1}{4} (n+1)^2 [n^2 + 4(n+1)]$$

$$= \frac{1}{4} (n+1)^2 [n^2 + 4n + 4] = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n^2 + 2 \times 2n + 2^2)$$

$$= \frac{1}{n} (n+1)^2 (n+2)^2 = \frac{(n+1)^2 ((n+1)+1)^2}{n}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

* concl: $\forall m \in \mathbb{N}, P(m)$ est vraie