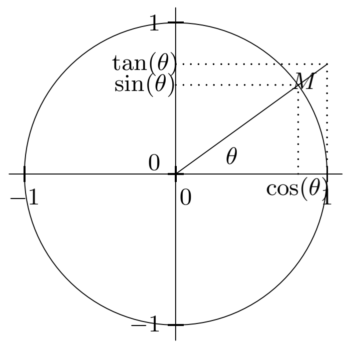
Chapitre 0 : Trigonométrie

1 Cercle trigonométrique



Le cercle trigonométrique, dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O (origine du repère) et de rayon 1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et M le point de $\mathcal{C}$ tel que θ soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$. On note alors $\cos(\theta)$ l'abscisse de M et $\sin(\theta)$ son ordonnée.

De plus, si $\theta \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, alors on pose

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Remarque 1. *L'ensemble* $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *est noté* $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Propriété 1.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Valeurs remarquables à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0

Propriété 2.

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $\cos(2\pi + x) = \cos(x)$ *et* $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos(x)$ *et* $\sin(-x) = -\sin(x)$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ *et* $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ *et* $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$ *et* $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ *et* $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Démonstration : à $x+2\pi$ correspond le même point qu'à x ; à $x+\pi$ le symétrique par rapport à 0 ; à $-x$ le symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; à $\pi - x$ celui par rapport à l'axe des ordonnées ; à $x+\dfrac{\pi}{2}$ l'image par une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, enfin à $\dfrac{\pi}{2}-x$ l'image par la symétrie axiale par rapport à la première bissectrice.

Propriété 3.

On a :
- $\cos$ *est définie sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique et paire.*
- $\sin$ *est définie sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique et impaire.*
- $\tan$ *est définie sur* $\mathbb{R}\setminus\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$, *est* π*-périodique et est impaire.*

2 Formules trigonométriques

Commençons par la plus célèbre et ses dérivées :

Propriété 4.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, *on a :*
- $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$
- *Si* $x\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, *alors* $1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Les formules suivantes sont toutes à connaître parfaitement. On apprendra plus tard à les retrouver à l'aide des exponentielles complexes.

Propriété 5 (Formules d'addition).

Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ *:*
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ *et* $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ *et* $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$
- *Si* $a,b,a+b\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, *on a* $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan b}{1-\tan(a)\tan(b)}$

► Exemple : Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Propriété 6 (Formules dites de l'angle double ou de duplication).

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *:*
- $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)$
- $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$
- *Lorsque* $x,2x\notin\dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ $\quad\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Remarque 2. *Ce ne sont que des cas particuliers des formules d'addition vues au-dessus. Pour obtenir* $\cos(3a)$, *on applique la formule de duplication à* a *et à* $2a$. *On peut donc calculer les valeurs de* $\cos(na)$ *et* $\sin(na)$ *de proche en proche de cette façon.*

On déduit de la propriété précédente :

Propriété 7.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *:*
- $\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Propriété 8 (Corollaire).

Soit $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{x}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. *Posons* $t = \tan(\frac{x}{2})$. *Alors*

- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- *Si* $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, *alors* $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

Remarque 3. *Ces expressions de* $\cos\theta$, $\sin\theta$ *et* $\tan\theta$ *en fonction de* $\tan\frac{\theta}{2}$ *seront souvent utiles (en particulier pour aborder les calculs d'intégrales trigonométriques), il faut donc les mémoriser dès maintenant, en remarquant leurs particularités propres (parité, ...).*

Propriété 9 (Transformations de produits en sommes).

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ *:*

- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
- $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

d'où

Propriété 10 (Transformations de sommes en produits).

Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$ *:*

- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

3 Equations et inéquations trigonométriques

Propriété 11.

Les équations trigonométriques les plus simples se résolvent de la façon suivante :

- $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ *ou* $x \equiv -a[2\pi]$
- $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ *ou* $x \equiv \pi - a[2\pi]$
- $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x \equiv a[\pi]$

Les équations et inéquations plus complexes se déduisent de celles-ci.

▶ Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

▶ Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin 3x = cos(x + \frac{\pi}{6})$.

▶ Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4 Etude des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont aussi appelées fonctions circulaires.

Lemme 1 (Admis)**.** *On a*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

.

Remarque 4. *On en déduit* $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Propriété 12.

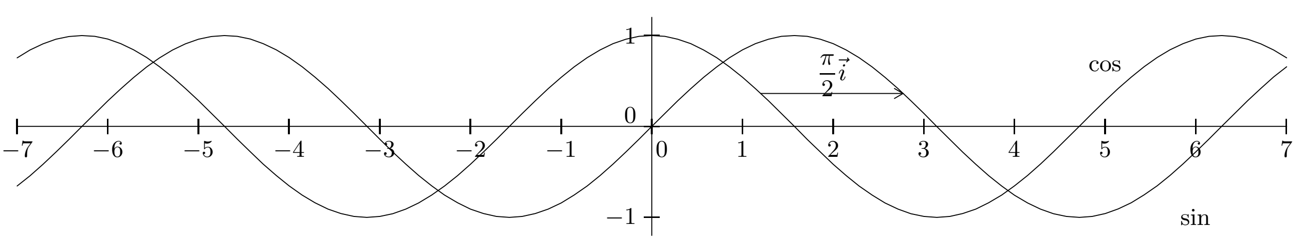
La fonction $x\mapsto \cos x$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*, paire et* 2π*-périodique. Elle est continue et dérivable et* $\cos'=-\sin$. *On a le tableau de variations suivant sur* $[-\pi,\pi]$ *:*

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$			1		
		0		0	
	-1				-1

Propriété 13.

La fonction $x\mapsto \sin x$ *est définie sur* $\mathbb{R}$*, impaire et* 2π*-périodique. Elle est continue et dérivable et* $\sin'=\cos$. *On a le tableau de variations suivant sur* $[-\pi,\pi]$ *:*

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$				1	
	0		0		0
		-1			

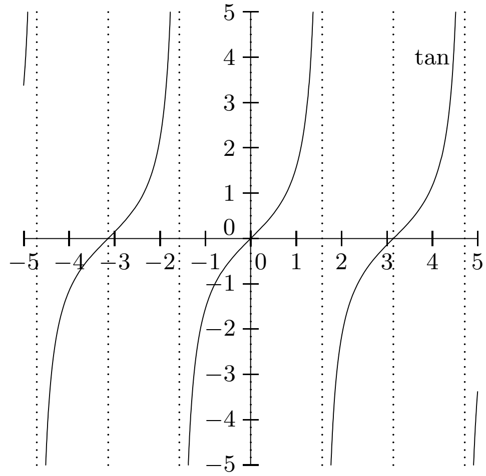


Remarque 5. *Le fait que, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\sin(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})$ *explique le fait que la courbe de* sin *soit la translatée de la courbe de* cos *par le vecteur* $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ *(sinus est en retard de* $\frac{\pi}{2}$ *sur cosinus).*

Propriété 14.

La fonction $x\mapsto\tan x$ *est définie sur chacun des intervalles de la forme* $]k\frac{\pi}{2},k\frac{\pi}{2}+\pi[$ *où* $k\in\mathbb{Z}$*, c'est-à-dire qu'elle est définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ *; elle est impaire et* π*-périodique. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition et* $\tan'=1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$. *On a le tableau de variations suivant sur* $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *:*

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$			$+\infty$
		0	
	$-\infty$		


tan
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5