Exercice 1

Dans cet exercice, on souhaite montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Tracer le cercle trigonométrique. Représenter un angle x appartenant à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Placer le point M du cercle tel que x soit la mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$. Placer le point A de coordonnées $(1, 0)$ et le point B de coordonnées $(1, \tan x)$.
2. Déterminer en fonction de x l'aire du triangle $0AM$, l'aire de la portion de disque OAM et l'aire du triangle $0AB$.
3. Comparer ces trois aires et en déduire que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \sin x \leq x \leq \tan x$.
4. En déduire que pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ \cos x < \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{\cos x}$, puis que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\ 0 < \sin x \leq x \leq \tan x$ (*).
5. Conclure.
6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(x) = 1$ si $x = 0$. On dit que f est le prolongement par continuité de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ en 0. Utiliser la relation $(*)$ pour montrer que f est dérivable en 0 et calculer le nombre dérivé.

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\tan x \tan(2x) < 1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
2. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right],\ f'(x) = \dfrac{1 + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{(1 + \cos x)^2}$ et étudier le signe de f'.

Exercice 4, facultatif

1. Montrer que pour $t \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$:

$$\tan(t) = \frac{1}{\tan t} - \frac{2}{\tan(2t)}.$$

2. En déduire que pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n \tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\tan(x)}.$$