Chapitre 1 : Calculs algébriques

Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter quelques notations et techniques fondamentales de calcul algébrique, notamment en vue de l'enseignement de la combinatoire et des probabilités mais aussi pour de nombreux chapitres qui vont suivre.
On a la convention suivante : si $z \in \mathbb{C}$, $z^0 = 1$ En particulier, $0^0 = 1$.

1 Sommes et produits

1.1 Notations

Définition 1 (Symbole $\sum$).

Soient a_0, a_1, ..., a_n des nombres complexes et I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

On pose $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Si $p \in [[0,n]]$, on pose aussi $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$.

Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes (c'est-à-dire si l'ensemble I est fini[1]), on note $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ la somme de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Dans le cas où I est l'ensemble vide (noté $\emptyset$), on a par convention $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Définition 2 (Symbole $\prod$).

Soient a_0, a_1, ..., a_n des nombres complexes et I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

On pose $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \ldots \times a_n$.

Si $p \in [[0,n]]$, on pose aussi $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \ldots \times a_n$.

Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes, on note $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ le produit de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Dans le cas où $I = \emptyset$, on a par convention $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i = 1$.

1.2 Règles de calcul

Propriété 1.

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes. On a les règles de calcul suivantes :

1. *si* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{i\in I}(\alpha \times a_i) = \alpha \times \sum_{i\in I} a_i$ *(factorisation),*
2. $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ *(linéarité),*
3. *si* $I = I_1 \cup I_2$ *avec* $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ *alors* $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$ *(regroupement de termes),*
4. *si* $I = [[p, n]]$ *et* $q \in I$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k$ *(relation de Chasles),*
5. $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_j$ *et* $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_j$ *(changement d'indice),*
6. *si* $q \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p+q}^{n+q} a_{j-q}$ *(changement d'indice $j = k + q$).*

Propriété 2.

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes. On a les règles de calcul suivantes :

1. *si* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\prod_{i\in I}(\alpha \times a_i) = (\alpha)^{nb\ d'\acute{e}l\acute{e}ments\ de\ I} \times \prod_{i\in I} a_i$,
2. $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_i \times b_i) = \prod_{i\in I} a_i \times \prod_{i\in I} b_i$,
3. ...
   (regroupement de facteurs),
4. ...
   (relation de Chasles),
5. ...
   (changement d'indice),
6. $\displaystyle\left(\prod_{i\in I} a_k\right)^p = \prod_{i\in I} a_k^p$.

► Exemple : quelques changements d'indices :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$
$$\prod_{i=0}^{n} a_{n-i} = \prod_{k=0}^{n} a_k.$$

Les symboles $\sum$ et $\prod$ sont liés l'un à l'autre par les fonctions ln et exp.

Propriété 3.

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres réels,

$$\exp\left(\sum_{i\in I} a_i\right) =$$

Si de plus les $(a_i)_{i\in I}$ sont strictement positifs,

$$\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) =$$

Propriété 4 (Factorisation de $a^n - b^n$).

Soit n un entier naturel non nul. Soient a et b deux nombres complexes.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Cette propriété se démontre directement.

1.3 Exemples de sommes et de produits à connaître

1. Somme télescopique :
   Pour toute famille $(a_k)_{p\in[[p,n+1]]}$ de nombres complexes,

$$\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1} - a_k) =$$

2. Produit télescopique :
   Pour toute famille $(a_k)_{p\in[[p,n+1]]}$ de nombres complexes non nuls,

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} =$$

3. Somme et produit de termes constants :
   Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, Pour toute famille $(a_k)_{p\in[[p,n+1]]}$ de nombres complexes,

$$\sum_{k=p}^{n} \alpha =$$

$$\prod_{k=p}^{n} \alpha =$$

4. Somme des n premiers entiers :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n =$$

5. Somme des n premiers carrés :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 =$$

6. Somme finie de termes successifs d'une suite arithmétique de nombres complexes :
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme le nombre complexe u_0 et de raison le nombre complexe r. On a pour tout entier naturel k : $u_k = u_0 + kr$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}(u_0 + kr)$$

7. Somme de termes en progression géométrique :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \qquad \text{si } q = 1, \qquad \text{si } q \neq 1.$$

Définition 3 (signe $\prod$ et factorielle).

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$. $n!$ se lit "factorielle n". Par convention, $0! = 1$.

► Exemple : A À l'aide d'un changement d'indice, calculer les sommes suivantes

[resume] 1. $\sum_{k=0}^{n}(n-k)^2$ 2. $\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)$ 3. $\sum_{k=2}^{10} 2^k$ 4. $\sum_{k=2}^{n} q^k$ (selon q) 5. $\sum_{k=i}^{j} q^k$ (selon q)

► Exemple : A' Calculer les sommes suivantes :

1. $A = 1 + 2 + \cdots + 500$
2. $B = 6 + 8 + 10 + \cdots + 150$
3. $C = 8 + 13 + 18 + \cdots + 1998 + 2003$
4. $D = 5 + 10 + 20 + 40 + \cdots + 5120$
5. $E = 2^2 + 2^5 + 2^8 + \cdots + 2^{20}$

1.4 Sommes doubles

Soit le tableau suivant à n lignes et p colonnes :

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1j} & \ldots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2j} & \ldots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{ij} & \ldots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nj} & \ldots & x_{np} \end{matrix}$$

La somme de tous les nombres du tableau se note : $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} x_{ij}$.

Encadrer la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.
Soit S_i la somme partielle des nombres de la ligne i. Ecrire S_i en faisant intervenir le signe $\sum$.
Soit T_j la somme partielle des nombres de la colonne j. Ecrire T_j en faisant intervenir le signe $\sum$.
Donner deux méthodes pour obtenir la somme de tous les nombres du tableau. On a donc le résultat suivant :

Théorème 1.

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} x_{ij}=\sum_{i=1}^{n} S_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)$$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} x_{ij}=\sum_{j=1}^{p} T_j=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)$$

Plus généralement

$$\sum_{\substack{i\in I\\j\in J}} x_{ij}=\sum_{i\in I} S_i=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{ij}\right)$$

$$\sum_{\substack{i\in I\\j\in J}} x_{ij}=\sum_{j\in J} T_j=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{ij}\right)$$

On retient donc que dans un calcul, on peut permuter deux signes $\sum$ consécutifs.

► Exemple : B Soient $n, m \in \mathbf{N}^*$. Calculer, en fonction de n et m la somme :
$\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$.

► Exemple : C Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer, en fonction de n la somme :
$\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$.

1.5 Sommes triangulaires

Soit le tableau triangulaire suivant à n lignes et n colonnes (ici c'est un tableau triangulaire inférieur) :

$$\begin{array}{cccccccc}
x_{11} & & & & & & & \\
x_{21} & x_{22} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{jj} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & & \\
x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ii} & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn}
\end{array}$$

La somme de tous les nombres du tableau se note : $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} x_{ij}$.

Encadrer la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.
Soit S_i la somme partielle des nombres de la ligne i. Ecrire S_i en faisant intervenir le signe $\sum$.
Soit T_j la somme partielle des nombres de la colonne j. Ecrire T_j en faisant intervenir le signe $\sum$.
Donner deux méthodes pour obtenir la somme de tous les nombres du tableau. On a donc le résultat suivant :

Théorème 2.

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} x_{ij}=\sum_{i=1}^{n} S_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} x_{ij}\right)$$

$$\sum_{1\leq j\leq i\leq n} x_{ij}=\sum_{j=1}^{n} T_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n} x_{ij}\right)$$

► Exemple : D Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer, en fonction de n la somme : $\displaystyle\sum_{1 \leq j < i \leq n} ij$.

1.6 Produit de deux sommes finies

Attention : $\displaystyle\left(\sum_{i \in I} a_i\right) \times \left(\sum_{i \in I} b_i\right) \neq \sum_{i \in I} (a_i \times b_i)$.

Propriété 5.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles de nombres complexes.

$$\left(\sum_{i \in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j\right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_i \times b_j\right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_i \times b_j\right).$$

Le résultat du produit de deux sommes finies est donc une somme double.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'éléments de I. Lorsque I a un élément, pour démontrer H_1 on fait une récurrence sur le nombre d'éléments de J en utilisant la distributivité.

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficients binomiaux

Définition 4 (Coefficients binomiaux).

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \in [[0, n]]$.
On pose $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.
$\displaystyle\binom{n}{p}$ *se lit "p parmi n".*
Par convention, si $p > n$, on pose $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.

Remarque 1. *Si n et p sont des entiers relatifs et si $n < 0$ ou $p < 0$ alors par convention* $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$.
Dans la pratique, si $n \geq 2$ et $p \in [[0, n]]$, $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$. *Par exemple,* $\displaystyle\binom{14}{3} =$

Propriété 6 (Relations).

Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \in [[0, n]]$.

1. ***symétrie*** : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2. *si $p \neq 0$ et $n \neq 0$,* $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$
3. ***formule de Pascal*** : $\displaystyle\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

► Exemple : $\displaystyle\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\displaystyle\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$.

Pour de petites valeurs de n, la formule de Pascal permet de construire le triangle de Pascal. La valeur de $\displaystyle\binom{n}{p}$ se situe à l'intersection de la $n$ème ligne et de la $p$ème colonne du triangle. La somme de deux coefficients consécutifs

sur une même ligne (colonnes p et $p+1$) donne le coefficient situé sur la ligne suivante, colonne $p+1$.
On retrouve ainsi la méthode d'obtention des coefficients binomiaux utilisée en classe de première :
Au départ on part d'un tableau triangulaire avec des 1 sur la colonne 0 et sur la diagonale.
Remplir ce tableau triangulaire et lire sur ce tableau $\binom{5}{2}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{6}{3}$.

1						
1	1					
1		1				
1			1			
1				1		
1					1	
1						1

2.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 3 (Formule du binôme de Newton).

Soient n un entier naturel, a et b deux nombres complexes.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

On calcule les $\binom{n}{k}$ à l'aide du triangle de Pascal.

► Exemple :

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

Ce triangle permet d'affirmer que :
$(a+b)^2 =$
$(a+b)^3 =$
$(a+b)^4 =$
$(a-b)^2 =$
$(a-b)^3 =$
$(a-b)^4 =$

Remarque 2 (Cas particuliers)**.** *Pour tout entier naturel n,*
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$
si $n > 0$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k =$