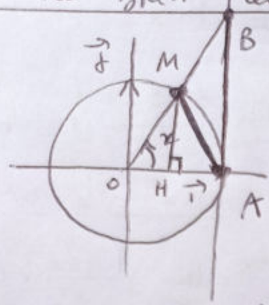
Corrigé du DM 1 rendu le 15/09/23

Ex 1

(1)



(2) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (OA).

(MH) est une hauteur du triangle OAM.

$\mathcal{A}_{OAM} = \frac{OA \times MH}{2} = \frac{1 \times \sin x}{2} = \boxed{\frac{\sin x}{2}}$

et OAB est rectangle en A donc $\mathcal{A}_{OAB} = \frac{OA \times AB}{2} = \frac{1 \times \tan x}{2} = \boxed{\frac{\tan x}{2}}$

angle en radians	2π	x
aire de la portion de disque en u.a.	$\pi \times 1^2$	?

← l'aire de la portion de disque est proportionnelle à l'angle qui définit la portion

$\mathcal{A}_{\text{portion de disque } OAM} = \frac{x \times \pi}{2\pi} = \boxed{\frac{x}{2}}$

(3) Puisque le triangle OAM est isocèle en O, la portion de disque OAM contient le triangle OAM et donc $\mathcal{A}_{\text{portion de disque } OAM} \geq \mathcal{A}_{OAM}$ donc $\frac{x}{2} \geq \frac{\sin x}{2}$

Puisque le point B est extérieur au disque, la portion de disque OAM est contenue dans le triangle OAB et donc $\mathcal{A}_{\text{portion de disque } OAM} \leq \mathcal{A}_{OAB}$

Ainsi $\frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$. Finalement $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2} \Rightarrow \underline{\sin x \leq x \leq \tan x}$

De plus, comme $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x > 0$.

(4) Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin x \leq x \leq \tan x$ donc $0 < 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\tan x}{\sin x}$, soit $0 < 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$. Par passage à l'inverse, $1 \geq \underline{\frac{\sin x}{x} \geq \cos x}$. $(**)$

On a donc d'une part $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ et d'autre part $0 < \cos x \leq 1$,

ce qui implique par passage à l'inverse que $\frac{1}{\cos x} \geq 1$

Ainsi $\frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{1}{\cos x}$, donc $\frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$ $(***)$

D'après $(**)$ et $(***)$ on a donc $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$

Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ alors $-x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq \frac{1}{\cos(-x)}$

or cos est paire et sin impaire donc :

$\cos x \leq \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$

Ainsi $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$, $\boxed{0 < \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad (*)}$

(5) D'après (3), $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin x \leq x$ donc par le théorème des gendarmes $\lim_{x \to 0^+} \sin x = 0$.

Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, alors $0 < \sin(-x) \leq -x$ puisque $-x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

or sin est impaire donc $0 < -\sin x \leq -x$, donc $0 > \sin x \geq x$

Par le théorème des gendarmes $\lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$ donc $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

donc $\lim_{x \to 0} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$. Or $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

donc $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ donc d'après $(*)$, par le th des gendarmes, $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

et $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

(6) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et par $f(x) = 1$ si $x = 0$.

Soit $x \neq 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$. Etudions si $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$ existe.

D'après $(*)$, si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$ donc $\frac{\cos x - 1}{x} \leq \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} \leq \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x}$ puisque $x > 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \lim\limits_{x \to 0^+} x = \frac{1}{2} \times 0 = 0$

De plus si $x > 0$, $\frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = \frac{1 - \cos x}{x \cos x} = \frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = 0 \times 1 = 0$

Enfin, par le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = 0$

D'après $(*)$, si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$ donc $\frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} \leq \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} \leq \frac{\cos x - 1}{x}$ puisque $x < 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x}$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = 0$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}$ existe et est finie donc <u>f est dérivable en 0</u> et <u>$f'(0) = 0$</u> puisque cette limite est égale à 0.

Exercice 2

① Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ par la formule de duplication

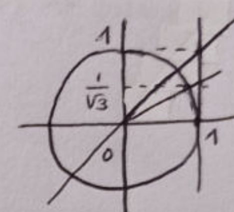
On pose $T = \tan x$. $\in [0, \frac{\pi}{2}[\iff T \geq 0$.

et $\tan x \tan(2x) < 1$ ssi $T \times \dfrac{2T}{1-T^2} < 1$ ssi $\dfrac{2T^2}{1-T^2} < 1$ ssi $\dfrac{2T^2}{1-T^2} - 1 < 0$

ssi $\dfrac{2T^2 - (1-T^2)}{1-T^2} < 0$ ssi $\dfrac{2T^2 - 1 + T^2}{1-T^2} < 0$

ssi $(3T^2 - 1 < 0$ et $1 - T^2 > 0)$ ou $(3T^2 - 1 > 0$ et $1 - T^2 < 0)$

T	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
$3T^2-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-T^2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{3T^2-1}{1-T^2}$		$-$	0	$+$	||	$-$	



$\dfrac{3T^2-1}{1-T^2} < 0$ ssi $T \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]1, +\infty[$ ssi $\tan x \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]1, +\infty[$

ssi $x \in [0, \frac{\pi}{6}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

$$\boxed{S = [0, \tfrac{\pi}{6}[\cup]\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}[}$$

② Soit $x \in \mathbb{R}$

On pose $X = \sin x$

$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \iff 2X^2 - 7X + 3 = 0 \iff 2(X - \frac{1}{2})(X-3) = 0$

$\iff X = \frac{1}{2}$ ou $X = 3 \iff \sin x = \frac{1}{2}$ ou $\underbrace{\sin x = 3}_{\text{impossible}} \iff \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\iff x \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

$$\boxed{S = \left\{\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}} = \left(\tfrac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\tfrac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

Ex 3 Soit $x \in \mathbb{R}$ $1+\cos x = 0$ ssi $\cos x = -1$ ssi $x \equiv \pi\ [2\pi]$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ en tant que somme et quotient défini de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $f'(x) = \dfrac{(\cos x - \sin x)(1+\cos x) - (-\sin x)(\sin x + \cos x)}{(1+\cos x)^2}$

$$f'(x) = \frac{\cos x + \cos^2 x - \sin x - \cancel{\sin x \cos x} + \sin^2 x + \cancel{\sin x \cos x}}{(1+\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x + 1}{(1+\cos x)^2}$$

De plus $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right] = \sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right]$

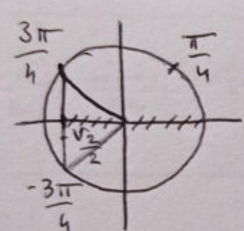
$= \cos x - \sin x$

Donc $$f'(x) = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1}{(1+\cos x)^2}$$

Déterminons le signe de f'.

Soit $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+1 \geq 0$ ssi $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}$

ssi $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$



or $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ ssi $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

ssi $x \in \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right]$

ssi $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Concl : f' est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Ex 4

① Soit $t \in]-\frac{\pi}{4},0[\cup]0,\frac{\pi}{4}[$

$$\frac{1}{\tan t} - \frac{2}{\tan(2t)} = \frac{1}{\tan t} - \frac{2}{\frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}} = \frac{1}{\tan t} - \frac{1-\tan^2 t}{\tan t} = \frac{\tan^2 t}{\tan t} = \tan t.$$

formule de duplication

② Soit $x \in]-\frac{\pi}{4},0[\cup]0,\frac{\pi}{4}[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\left[\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)} - \frac{2}{\tan\left(\frac{2x}{2^k}\right)}\right]\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{2^0\tan\left(\frac{x}{2^0}\right)}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n\tan\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{1}{\tan(x)}}$$