

TD 1 : Calculs algébriques

► Exercice 1 : Calculer les sommes suivantes pour tout entier naturel n (éventuellement non nul).

$$\begin{array}{lllllll} 1. \sum_{k=1}^n 1 & 2. \sum_{k=0}^n 1 & 3. \sum_{k=p}^q 1 & 4. \sum_{k=1}^n k(k+1) & 5. \sum_{k=0}^n 2.5^k & 6. \sum_{k=1}^n 3^{k+1} & 7. \sum_{k=1}^n (k^2 - 3^k) \\ 8. \sum_{k=1}^n (k^2 + k - 1) & 9. \sum_{k=2}^n (k^2 + 2k + 1) & 10. \sum_{k=2}^n k & 11. \sum_{k=4}^{n+1} k & 12. \sum_{k=2}^n (k^2 - 2k) \end{array}$$

► Exercice 2 : Simplifier $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ puis $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. On remarquera que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

► Exercice 3 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$.

► Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $U_n = \prod_{k=0}^n 3 \exp(-k^2)$, $V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ et $W_n = \prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

► Exercice 5 : Calculer les sommes : $A = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (1 - ij + 3^j)$, $B = \sum_{k=1}^n k 2^k$, $C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$ et $D = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} \frac{k}{i}$.

► Exercice 6 : Simplifier

$$1. \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \quad 2. \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{2}} \quad 3. \frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{3}} \quad 4. \binom{n+3}{3} \quad 5. \binom{n+4}{n}$$

► Exercice 7 :

1. Soient n et k deux entiers non nuls tels que $n \geq k$. Faire apparaître des factorielles dans les expressions suivantes : $n(n-1)\dots(n-k+1)$, $(n+k)(n+k-1)\dots(n-1)$, $\frac{2.4.6.8\dots(2n)(2n+2)}{1.3.5.7\dots(2n+1)}$.
2. Vrai ou Faux ? $\frac{13!}{5!7!} = \binom{13}{5} \times 8$; $\frac{13!}{5!7!} = \binom{13}{8} \times 8$; $\frac{13!}{5!7!} = \binom{12}{5} \times 13$.

► Exercice 8 : Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 2^k \quad 3. \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 3^{k+1} \quad 4. \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} 5^{-k} \quad 5. \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} 4^{1-k}$$

► Exercice 9 : Calculer $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$ (faire la somme et la différence des deux sommes).

► Exercice 10 : Soient k, p, n des entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{k}{p} \text{ et en déduire la valeur des sommes : } \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} \text{ et } \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}.$$