Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent ne pas être traités dans l'ordre. Le devoir est noté sur 32 points.

Exercice 1 sur 9 points

1. Soient p et n deux entiers naturels. Ecrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles :
   (a) $A = (p+1)(p+2)...(p+n)$,
   (b) $B = 2 \times 4 \times \cdots \times (2p)$,
   (c) $C = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2p+1)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(7^k + 4k - n + 2)$.
   (b) $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$.

Exercice 2 sur 6 points

1. Soient p et k deux entiers naturels tels que $k \geq p$. Rappeler sans démonstration la formule de Pascal qui relie $\binom{k}{p}$ et $\binom{k+1}{p+1}$.
2. Un entier naturel p étant fixé, démontrer que, pour tout entier $n \geq p$,
$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
3. A l'aide de cette formule, retrouver les sommes classiques $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 3 sur 11 points

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

Partie A - Etude de fonctions

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sin(3x) - 3\sin(x).$$

1. Montrer que f est 2π-périodique.
2. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
4. Déduire des trois questions précédentes une méthode pour construire la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$ à partir de la courbe représentative de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -6\sin(x)\sin(2x).$$
   On pourra pour cela utiliser une formule de trigonométrie.
6. Etudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
7. Tracer la courbe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4 sur 6 points

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
g est la fonction définie par

$$g(0) = 0 \text{ et } g(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \text{ pour } x \neq 0.$$

1. Démontrer que g est dérivable en 0. On pourra utiliser le théorème des gendarmes.
2. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.